Ю. Б. Румер, А. И. Фет

Теория групп и квантованные поля

Ю. Б. РУМЕР, А. И. ФЕТ

ТЕОРИЯ ГРУПП И КВАНТОВАННЫЕ ПОЛЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1977

Р. 86
530.1
УДК 530.145

Теория групп и квантованные поля. Ю. Б. Румер, А. И. Фет, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1977, 248 стр.

Книга содержит введение в кинематику квантованных полей и некоторые общие результаты, вытекающие из теоретико-группового подхода. Изложение основано на спинорной алгебре, систематически изложенной в первой части книги. Подчеркнута связь между динамическими уравнениями и неприводимыми представлениями группы Пуанкаре. Во второй части, после сжатого изложения математической схемы квантовой теории поля, выводится теорема Вайнберга о связи операторов поля с операторами рождения и уничтожения частиц, откуда естественно получаются неприводимые представления Вигнера в пространстве состояний системы, групповые определения спина и спиральности и общие теоремы о возможных квантованных полях.

Библ. 16 назв., илл. 3.

Р $\frac{20402-134}{053\ (02)-77}$ 116-77

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Как известно, с каждым видом частиц в квантовой теории связывается поле, квантами которого называются эти частицы. Эти два способа описания физической действительности связаны между собой, грубо говоря, преобразованием Фурье.

Частицы (и соответствующие им античастицы) должны быть описаны с помощью формализма, в котором их число может меняться; состояния такой системы частиц изображаются векторами пространства Фока, которое порождается из фиксированного вектора вакуумного состояния действием операторов рождения и уничтожения. По самому смыслу этих операторов они подчиняются простым перестановочным соотношениям, различным для бозонов и фермионов. Из этих операторов, зависящих от импульса и поляризации (проекции спина), в конкретных случаях конструируются квантованные поля, причем обычно используются соображения, подсказываемые соответствующим лагранжевым формализмом. Поля эти суть векторные функции с операторными значениями, определенные на пространстве Минковского и просто преобразующиеся под действием группы Пуанкаре.

Закон преобразования векторов состояния, т. е. описание представлений группы Пуанкаре на пространстве Фока, был найден Вигнером в 1939 г. в результате глубокого математического исследования. Равносильные ему правила преобразования операторов рождения и уничтожения довольно сложны и вошли в обиход теоретической физики не сразу. Работа Вигнера [7] и последовавшие за ней работы аналогичного содержания и до сих пор остаются труднодоступными для физиков и известны значительно меньше, чем этого заслуживает их научное значение.

Важные применения группового подхода к квантованным полям были сделаны в 1964 г. Вайнбергом. Определяя частицу по Вигнеру с помощью неприводимого унитарного представления группы Пуанкаре, поле же — с помощью «полевого» представления той же группы, заданного некоторым конечномерным представлением группы Лоренца, действующим на компоненты поля, Вайнберг установил простое и общее соотношение между операторами рождения (уничтожения) и операторами поля. Соотношение это сводится к линейному преобразованию, коэффициенты которого зависят от импульса, и к преобразованию Фурье.

Из этого общего определения связи между полями и частицами вытекает ряд замечательных следствий. Сразу же, без всякого использования динамических уравнений, находятся известные выражения электромагнитного, электронно-позитронного, нейтринного полей через операторы рождения и уничтожения их квантов. Обнаруживаются ограничения на возможные типы полей в зависимости от спина их квантов, особенно интересные в случае безмассовых частиц.

Далее такой подход позволяет с новой точки зрения понять и «уравнения движения» для свободных частиц. Оказывается, что требование неприводимости поля по отношению к группе Пуанкаре (включая в некоторых важных случаях пространственное отражение) естественно приводит к уравнению Дирака для электрона, Вейля для нейтрино, Максвелла для фотона. Каждое из этих уравнений в рамках развитой «групповой кинематики» квантованных полей представляет собой, по выражению Вайнберга, «простое признание того факта, что поле имеет излишние компоненты». Попутно получается и знаменитая теорема Паули о связи спина со статистикой.

Работы [5, а—г] изложены весьма сжато; в них не приняты во внимание упрощения, возникающие при замене группы Лоренца двулистной накрывающей $SL(2)$, как это делается в спинорной алгебре. Но самым существенным препятствием для ознакомления с указанными работами начинающих (а может быть, и не только начинающих) физиков является способ построения, при котором с самого начала вводятся бесконечномерные унитарные представления группы Пуанкаре со ссылкой на упомянутую работу Вигнера. Результаты этого трудного математического исследования в их готовом виде не кажутся нам наилучшим подходом к рассматриваемому кругу вопросов. Поэтому мы попытались изложить те же результаты в обратном порядке, отправляясь от хорошо известных свойств квантованных полей. Простой закон их преобразования при замене наблюдателя позволяет однозначно выразить квантованные поля через операторы рождения и уничтожения без использования не только динамических уравнений, но и представлений Вигнера. Более того, такой подход естественно приводит к этим представлениям.

Систематическое применение спинорной алгебры неизбежно потребовало начать книгу с ее элементарного изложения; это показалось нам тем более желательным, что такое изложение давно не появлялось на русском языке (книга [12] уже стала библиографической редкостью).

Первая часть предлагаемой книги представляет собой введение в спинорную алгебру, не предполагающее у читателя никаких сведений о группах; все необходимое излагается по мере надобности, так что физик, не владеющий групповыми методами, найдет здесь простейшие примеры их применения.

Изложение спинорной алгебры, по существу следующее классическим работам Ван дер Вардена, несколько приближено к современному математическому стилю; спинорная алгебра трактуется при этом как частный случай тензорной алгебры над комплексным векторным пространством в последовательно проведенных тензорных обозначениях. В первой части книги от читателя требуются лишь простейшие сведения о линейной алгебре и тензорах.

Для чтения второй части необходимо знание основных принципов квантовой механики систем с конечным числом степеней свободы, а также некоторое знакомство с применением квантованных полей в квантовой электродинамике. Все нужные нам свойства квантованных полей перечислены и кратко разъяснены; однако более глубокое понимание их, связанное с их ролью в динамике, в рамках этой книги не может быть достигнуто. Нам пришлось, в частности, отказаться от сколько-нибудь глубокой трактовки дискретных преобразований.

Естественно, мы не претендуем на сколько-нибудь полный охват необъятного круга вопросов, связанных с группой Пуанкаре, и ставим себе целью лишь ввести читателя в эту область. Вычислительные методы развиты лишь настолько, насколько этого требует план книги, и разобраны лишь немногие важнейшие примеры. Во всех случаях мы добивались отчетливости изложения, сознательно ограничивая себя в выборе материала.

Конечно, уровень математической строгости, которого мы придерживаемся, не может быть слишком высоким. Все относящееся к группам и их представлениям отчетливо разъясняется, но почти ничего не доказывается. Что же касается обобщенных функций, то здесь у читателя предполагается некоторый опыт работы с ними, приобретаемый при изучении квантовой механики; определения понятий лишь намечены.

Как мы надеемся, эта книга, вводящая читателя независимо от лагранжева формализма в современную кинематику квантованных полей, может послужить полезной подготовкой для изучения их динамики. Несколько трудов по квантовой теории поля и теории групп, оказавших на авторов наибольшее влияние, указаны в списке литературы [2—4, 6, 8—10].

Мы считаем приятным долгом выразить признательность коллегам, проявившим интерес к этой книге: Л. Г. Карякину, внимательно прочитавшему большую часть рукописи и сделавшему ряд ценных замечаний, а также А. З. Паташинскому и Б. Г. Конопельченко, с которыми обсуждались отдельные вопросы. Особо нам хотелось бы отметить внимательное отношение к книге рецензента Б. В. Медведева, критика которого весьма содействовала ее улучшению.

Часть I

СПИНОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Группа Лоренца

Пространство Минковского. В соответствии с принципами специальной теории относительности пространственно-временно́е описание природы основывается на понятии *события*. Любой наблюдатель воспринимает событие как физическое явление, происходящее в «достаточно малой области пространства» и «в достаточно малом промежутке времени». Однако самое разделение «пространственного» и «временно́го» аспектов события и, тем более, координатное описание «где» и «когда» произошло событие, зависят от того, какой наблюдатель его описывает. Чтобы выразить «абсолютный» характер событий, не зависящий от условий их наблюдения, используется математическая абстракция *пространства событий*, предложенная Минковским.

Каждому событию сопоставляется *точка* этого пространства, рассматриваемая как индивидуальный математический объект, отличимый от всех других объектов этого рода. Сама по себе точка пространства Минковского не обладает никакими численными характеристиками; координаты служат лишь способом задания точек, принципиально неоднозначным, поскольку ни один из таких способов не имеет преимущества перед другими в общем построении теории относительности. Такое «бескоординатное» понимание точек характерно для современной концепции математического пространства и наилучшим образом соответствует физическому пониманию событий. Будем обозначать пространство Минковского через $\mathscr{M}$, а точки его через P, Q, ...

Предположим, что каждой упорядоченной паре точек (P, Q) пространства $\mathcal{M}$ поставлен в соответствие объект, называемый *вектором* пространства $\mathcal{M}$ и обозначаемый через $\overrightarrow{PQ}$. Если паре точек (P, Q) и паре точек (R, S) соответствует один и тот же вектор, это записывают в виде $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{RS}$.

Относительно векторов x, y, ... пространства $\mathcal{M}$ делаются допущения, определяющие геометрическую структуру этого «пространства событий» и тем самым имеющие важное физическое значение. Прежде всего, предполагается, что векторы можно складывать и умножать на действительные числа λ, μ, ... с соблюдением обычных алгебраических требований:

(1) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативность сложения);

(2) $x+y=y+x$ (коммутативность сложения);

(3) Существует вектор 0, для которого $x+0=0$;

(4) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$;

(5) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$; (1.1)

(6) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$;

(7) $1\cdot x=x$;

(8) $0\cdot x=0$ (в левой части — число нуль, в правой — нулевой вектор).

Эти требования объединяют формулировкой: *векторы пространства $\mathcal{M}$ образуют (действительное) векторное пространство.*

Далее предполагается, что точки и векторы $\mathcal{M}$ связаны *аксиомами Вейля*:

(1) Для каждой точки P и каждого вектора x существует единственная точка Q, для которой $\overrightarrow{PQ}=x$;

(2) Если $\overrightarrow{PQ}=x$, $\overrightarrow{QR}=y$, то $\overrightarrow{PR}=x+y$.

Предполагается, что *размерность* $\mathcal{M}$ (т. е. наибольшее число линейно независимых векторов $\mathcal{M}$) равна четырем. Тем самым, все векторы $\mathcal{M}$ могут быть представлены в виде линейных комбинаций любых четырех линейно независимых векторов (e_0, e_1, e_2, e_3), составляющих *базис* векторов $\mathcal{M}$.

Наконец, предполагается, что в $\mathcal{M}$ задано *скалярное произведение* векторов, т. е. каждым двум векторам x, y поставлено в соответствие действительное число (x, y), причем соблюдаются следующие требования:

(1) $(\lambda x+\mu y,\ z)=\lambda(x,\ z)+\mu(y,\ z)$, где x, y, z — векторы, λ, μ — числа;

(2) $(x,\ y)=(y,\ x)$ (симметричность произведения);

(3) В $\mathcal{M}$ существуют векторы x, для которых $(x, x) > 0$ (*времениподобные* векторы), и векторы y, для которых $(y, y) < 0$ (*пространственноподобные* векторы); существует трехмерная плоскость из пространственноподобных векторов.

Образуя линейные комбинации $\lambda x+\mu y$ векторов указанных видов, легко доказать существование векторов z, для которых $(z,\ z)=0$; такие векторы называются *изотропными* и составляют *световой конус*. Множество всех времениподобных векторов называют *временным конусом*, а множество всех пространственноподобных — *пространственным конусом* [1]).

Число

$$I(P,\ Q)=(\overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PQ}) \tag{1.2}$$

называется *интервалом* между точками (или событиями) P, Q. Если это число положительно, интервал называется времениподобным, если отрицательно — пространственноподобным.

Можно доказать, что в $\mathcal{M}$ существуют *псевдоортонормированные базисы*, т. е. базисы (e_0, e_1, e_2, e_3), для которых

$$e_0^2=1,\qquad e_1^2=e_2^2=e_3^2=-1. \tag{1.3}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться только такими базисами, не оговаривая это каждый раз. Для каждого вектора x можно построить его *контравариантные*

---

[1]) Этот термин встречается преимущественно в математической литературе.

координаты x^α относительно выбранного базиса (e_α) — коэффициенты разложения по этому базису

$$x = x^\alpha e_\alpha; \tag{1.4}$$

здесь, как и в дальнейшем, применяется правило Эйнштейна, согласно которому следует суммировать по любому индексу, встречающемуся в произведении один раз снизу и один раз сверху. Числа

$$x_\alpha = (x,\ e_\alpha) \tag{1.5}$$

называются *ковариантными координатами* вектора x относительно того же базиса [1]).

Скалярное произведение векторов x, y выражается через их координаты

$$(x,\ y) = (x^\alpha e_\alpha,\ y) = x^\alpha (y,\ e_\alpha),$$

откуда

$$(x,\ y) = x^\alpha y_\alpha, \tag{1.6}$$

и аналогично, меняя местами x, y, имеем

$$(x,\ y) = x_\alpha y^\alpha. \tag{1.7}$$

Чтобы выразить скалярное произведение через одни только контравариантные (или ковариантные) координаты, введем «метрический тензор»

$$\begin{gathered} g_{\alpha\beta} = (e_\alpha,\ e_\beta), \\ g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \end{gathered} \tag{1.8}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (x,\ y) = (x^\alpha e_\alpha,\ y^\beta e_\beta) = g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = \\ = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Координаты обоих видов связаны соотношениями

$$\begin{gathered} x_\alpha = (x,\ e_\alpha) = g_{\alpha\beta} x^\beta, \\ x_0 = x^0, \quad x_k = -x^k \qquad (k = 1,\ 2,\ 3), \end{gathered} \tag{1.10}$$

---

[1]) Оба названия связаны с поведением координат при замене базиса, о чем будет речь ниже.

поэтому, полагая

$$g^{00}=1, \quad g^{11}=g^{22}=g^{33}=-1, \quad g^{\alpha\beta}=0 \quad (\alpha\neq\beta), \tag{1.11}$$

находим

$$(x,\ y)=g^{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta=x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3. \tag{1.12}$$

Матрица $(g^{\alpha\beta})$ обратна матрице $(g_{\alpha\beta})$ и в то же время совпадает с нею (последнее обстоятельство связано с псевдоортонормированностью базиса).

Преобразования Лоренца. Закрепим в пространстве Минковского точку O (*начало отсчета*) и рассмотрим всевозможные преобразования Λ этого пространства, оставляющие неподвижной точку O и сохраняющие интервалы между точками:

$$I(\Lambda P,\ \Lambda Q)=I(P,\ Q). \tag{1.13}$$

Такие преобразования называются *преобразованиями Лоренца*[1]). Отождествляя точки P с их радиусами-векторами $x=\overrightarrow{OP}$, можно заменить записи вида $P'=\Lambda P$ равносильными векторными записями $x'=\Lambda x$, рассматривая тем самым Λ как преобразование векторов пространства $\mathcal{M}$. Тогда (1.13) принимает вид $(\Lambda x-\Lambda y,\ \Lambda x-\Lambda y)=(x-y,\ x-y)$, откуда ввиду симметричности скалярного произведения получаем

$$(\Lambda x,\ \Lambda x)-2(\Lambda x,\ \Lambda y)+(\Lambda y,\ \Lambda y)=\\ =(x,\ x)-2(x,\ y)+(y,\ y).$$

Полагая здесь $y=0$, находим сначала $(\Lambda x,\ \Lambda x)=(x,\ x)$, и аналогично $(\Lambda y,\ \Lambda y)=(y,\ y)$, откуда

$$(\Lambda x,\ \Lambda y)=(x,\ y). \tag{1.14}$$

Итак, преобразования Лоренца сохраняют скалярное произведение. Обратно, из (1.14) легко следует (1.13), так что мы получили определение, равносильное исходному. Можно доказать, что из (1.14) следует *линейность*

---

[1]) Достаточно было бы потребовать непрерывности Λ и сохранения светового конуса (если $I(P,\ Q)=0$, то $I(\Lambda P,\ \Lambda Q)=0$), откуда уже вытекает (1.13).

преобразований Лоренца (как преобразований векторов пространства $\mathscr{M}$):

$$\Lambda(\lambda x+\mu y)=\lambda\Lambda x+\mu\Lambda y. \tag{1.15}$$

Подчеркнем, что мы рассматриваем здесь преобразования Лоренца с «активной» точки зрения, т. е. считаем, что они переводят каждый вектор $\mathscr{M}$ в другой (вообще говоря) вектор $\mathscr{M}$. Есть иная, «пассивная», точка зрения, рассматривающая преобразования Лоренца как правила пересчета координат произвольного (одного и того же) вектора $\mathscr{M}$ при переходе к другой системе отсчета. Этим истолкованием мы займемся ниже.

Чтобы выразить преобразования Лоренца в координатах, фиксируем базис (e_α). Тогда имеем

$$x'=\Lambda x=\Lambda(x^\alpha e_\alpha)=x^\alpha\Lambda(e_\alpha);$$

выразим векторы $e'_\alpha=\Lambda e_\alpha$ через исходные базисные векторы:

$$e'_\alpha=\Lambda e_\alpha=\Lambda^\beta_\alpha e_\beta, \tag{1.16}$$

откуда

$$\begin{gathered}\Lambda x=\Lambda(x^\alpha e_\alpha)=x^\alpha\Lambda e_\alpha=(\Lambda^\beta_\alpha x^\alpha)\,e_\beta,\\ x'^\beta=\Lambda^\beta_\alpha x^\alpha.\end{gathered} \tag{1.17}$$

Нетрудно выразить преобразования Лоренца также в ковариантных координатах; в силу (1.14)

$$(x,\ e_\alpha)=(\Lambda x,\ \Lambda e_\alpha)=(x',\ \Lambda^\beta_\alpha e_\beta)=\Lambda^\beta_\alpha(x',\ e_\beta),$$

откуда

$$x_\alpha=\Lambda^\beta_\alpha x'_\beta. \tag{1.18}$$

Заметим, что роль матрицы $(\Lambda)=(\Lambda^\beta_\alpha)$ в формулах (1.17), (1.18) различна. Прежде всего, в (1.17) она служит для выражения новых координат через старые, а в (1.18) — обратно. Далее, в (1.17) суммирование производится по нижнему индексу, который мы будем считать номером столбца, а в (1.18) — по верхнему, рассматриваемому как номер строки. В таких случаях мы будем полагать, что при суммировании по номеру столбца применяется матрица (Λ), а при суммировании по номеру строки — *транспонированная* матрица $(\Lambda)^T$.

Любая из формул (1.16)—(1.18) задает некоторое (одно и то же во всех трех случаях) линейное преобразование векторов $x' = \Lambda x$; выясним, какие условия надо наложить на матрицу (Λ), чтобы Λ было *преобразованием Лоренца*. В силу (1.14) для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$(\Lambda x,\ \Lambda y) = g_{\alpha\beta}(\Lambda x)^\alpha (\Lambda y)^\beta = g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta x^\gamma y^\delta$$

было равно

$$(x,\ y) = g_{\gamma\delta}x^\gamma y^\delta$$

для любых x, y, т. е.

$$g_{\gamma\delta} = g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta.$$

Считая, как обычно, первый индекс $g_{\alpha\beta}$ номером строки, а второй номером столбца, можно записать это в матричном виде (учитывая предыдущее соглашение о суммировании):

$$G = (\Lambda)^T G(\Lambda). \tag{1.19}$$

В силу (1.8) матрица (Λ) задает преобразование Лоренца в том и только том случае, когда

$$\Lambda^0_\alpha \Lambda^0_\beta - \Lambda^1_\alpha \Lambda^1_\beta - \Lambda^2_\alpha \Lambda^2_\beta - \Lambda^3_\alpha \Lambda^3_\beta = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta), \\ 1 & (\alpha = \beta = 0), \\ -1 & (\alpha = \beta = 1,\ 2,\ 3). \end{cases} \tag{1.20}$$

Матрицы, удовлетворяющие условиям (1.20), называются *псевдоортогональными*.

Заметим, что из (1.19) и $\det G = -1$ следует

$$\det \Lambda = \pm 1; \tag{1.21}$$

далее из (1.20) имеем $(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum\limits_{k=1}^{3} (\Lambda^k_0)^2$, откуда

$$|\Lambda^0_0| \geqslant 1. \tag{1.22}$$

Тем самым преобразования Лоренца разбиваются на четыре класса, в зависимости от знаков $\det \Lambda$ и Λ_0^0:

$$\begin{aligned} &\Lambda_0^0 > 0, \quad \det \Lambda > 0; \\ &\Lambda_0^0 > 0, \quad \det \Lambda < 0; \\ &\Lambda_0^0 < 0, \quad \det \Lambda < 0; \\ &\Lambda_0^0 < 0, \quad \det \Lambda > 0. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Важными примерами преобразований этих классов являются:

$$\begin{aligned} &\text{тождественное преобразование:} && Ix = x; \\ &\text{пространственное отражение:} && \mathsf{P}(x, x^0) = (-x, x^0); \\ &\text{обращение времени:} && \mathsf{T}(x, x^0) = (x, -x^0); \\ &\text{полное отражение в пространстве Минковского:} && \\ & && \mathsf{PT}(x) = -x. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Таким образом, существуют преобразования всех четырех классов. Как мы увидим ниже, преобразования каждого из этих классов образуют *связное* множество, т. е. могут быть переведены друг в друга непрерывным изменением. Отсюда будет следовать, что указанное разбиение на классы не зависит от выбора базиса: в самом деле, поскольку условия (1.23) сохраняются при непрерывном изменении Λ, каждый из классов может быть охарактеризован как класс всех тех преобразований Лоренца, которые могут быть переведены непрерывным изменением в одно из четырех фиксированных преобразований (1.24).

Преобразования с $\det \Lambda > 0$ называются *собственными*, с $\Lambda_0^0 > 0$ — *ортохронными*, с $\det \Lambda > 0$ и $\Lambda_0^0 > 0$ — *собственными ортохронными*, или *специальными*.

Рассмотрим, в частности, преобразования, сохраняющие две из координат, например x^2, x^3, и тем самым действующие в плоскости векторов e_0, e_1. В этом случае матрица (Λ) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 & 0 & 0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и для Λ^α_β (α, $\beta = 0$, 1) остается решить уравнения (1.20). Общее решение их без труда выражается через гиперболические функции, где ϑ — произвольный действительный параметр:

либо

$$\Lambda^0_0 = \operatorname{ch}\vartheta, \quad \Lambda^0_1 = \operatorname{sh}\vartheta, \quad \Lambda^1_0 = \operatorname{sh}\vartheta, \quad \Lambda^1_1 = \operatorname{ch}\vartheta;$$

либо

$$\Lambda^0_0 = \operatorname{ch}\vartheta, \quad \Lambda^0_1 = -\operatorname{sh}\vartheta, \quad \Lambda^1_0 = \operatorname{sh}\vartheta, \quad \Lambda^1_1 = -\operatorname{ch}\vartheta;$$

либо

$$\Lambda^0_0 = -\operatorname{ch}\vartheta, \quad \Lambda^0_1 = \operatorname{sh}\vartheta, \quad \Lambda^1_0 = -\operatorname{sh}\vartheta, \quad \Lambda^1_1 = \operatorname{ch}\vartheta;$$

либо

$$\Lambda^0_0 = -\operatorname{ch}\vartheta, \quad \Lambda^0_1 = -\operatorname{sh}\vartheta, \quad \Lambda^1_0 = -\operatorname{sh}\vartheta, \quad \Lambda^1_1 = -\operatorname{ch}\vartheta.$$

Отсюда получаем четыре вида преобразований:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \pm x^0 \operatorname{ch}\vartheta + x^1 \operatorname{sh}\vartheta, & x'^0 &= \pm x^0 \operatorname{ch}\vartheta - x^1 \operatorname{sh}\vartheta, \\ x'^1 &= \pm x^0 \operatorname{sh}\vartheta + x^1 \operatorname{ch}\vartheta, & x'^1 &= \pm x^0 \operatorname{sh}\vartheta - x^1 \operatorname{ch}\vartheta, \end{aligned} \tag{1.25}$$

принадлежащих четырем описанным выше классам. Для преобразований первого класса ($\Lambda^0_0 > 0$, $\det\Lambda > 0$) положим

$$\operatorname{ch}\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \operatorname{sh}\vartheta = \frac{-v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x^0 = ct, \; x^1 = x;$$

тогда мы приходим к известным простейшим формулам для преобразований Лоренца:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{1.26}$$

Групповое свойство преобразований Лоренца. Важнейшее свойство преобразований Лоренца состоит в том, что они образуют группу [1]). Чтобы прийти к этому свой-

---

[1]) Это свойство, не замеченное Лоренцом и открытое Эйнштейном, означает, в частности, равноправие «прямого» преобразования Λ и обратного ему Λ^{-1}, т. е. равноправие всех инерциальных систем отсчета, что и составляет «принцип относительности».

ству, выполним последовательно два преобразования Лоренца, сначала M, затем Λ:

$$x' = \mathrm{M}x, \quad x'' = \Lambda x'.$$

Результат обоих преобразований обозначим через N, $\mathrm{N}x = x''$; N есть также преобразование Лоренца, так как

$$(\mathrm{N}x, \mathrm{N}y) = (x'', y'') = \\ = (\Lambda x', \Lambda y') = (x', y') = (\mathrm{M}x, \mathrm{M}y) = (x, y).$$

N называется *произведением* преобразований Лоренца Λ, M и обозначается ΛM, причем справа записывается преобразование, выполняемое в первую очередь. В фиксированном базисе (e_α) матрица N является произведением матриц (Λ), (M):

$$\text{если } \mathrm{N} = \Lambda\mathrm{M}, \quad \text{то } \mathrm{N}^\alpha_\beta = \Lambda^\alpha_\gamma \mathrm{M}^\gamma_\beta. \tag{1.27}$$

Легко проверить, что введенное таким образом умножение ассоциативно, т. е. для любых трех преобразований Лоренца Λ, M, N (как, впрочем, и для любых преобразований)

$$(\Lambda\mathrm{M})\,\mathrm{N} = \Lambda\,(\mathrm{MN}). \tag{1.28}$$

(Конечно, коммутативный закон здесь не выполняется, т. е., вообще говоря, $\Lambda\mathrm{M} \neq \mathrm{M}\Lambda$.)

К числу преобразований Лоренца принадлежит *тождественное* преобразование I, переводящее каждый вектор x в этот же вектор:

$$Ix = x, \tag{1.29}$$

I — единичная матрица.

Для этого преобразования, и только для него,

$$\Lambda I = I\Lambda = \Lambda \quad \text{при всех } \Lambda. \tag{1.30}$$

Наконец, для всякого преобразования Лоренца Λ в силу (1.21) $\det\Lambda \neq 0$, так что существует (однозначно определенное) обратное преобразование Λ^{-1}:

$$\text{если } \Lambda^{-1}\Lambda = \Lambda\Lambda^{-1} = I, \quad \text{то } (\Lambda^{-1})^\alpha_\gamma \Lambda^\gamma_\beta = \delta^\alpha_\beta. \tag{1.31}$$

Λ^{-1} также оказывается преобразованием Лоренца, так как из $\Lambda^{-1}x = x'$, $\Lambda^{-1}y = y'$ следует

$$(\Lambda^{-1}x,\ \Lambda^{-1}y) = (x',\ y') = (\Lambda x',\ \Lambda y') = \\ = (\Lambda\Lambda^{-1}x,\ \Lambda\Lambda^{-1}y) = (x,\ y).$$

Только что указанные свойства умножения преобразований Лоренца прямо приводят нас к понятию *группы*, общее определение которого состоит в следующем. *Группой называется множество G элементов любой природы g, g_1, g_2, ..., для которых введена операция умножения, ставящая в соответствие каждой упорядоченной паре элементов g_1, g_2 элемент g того же множества, называемый произведением g_1 на g_2 и обозначаемый g_1g_2, причем выполнены следующие условия:*

(1) $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$ *для любых* g_1, g_2, g_3 (ассоциативность умножения);

(2) *существует единственный элемент I, для которого $gI = Ig = g$ при всех g* (существование единичного элемента);

(3) *для каждого g существует единственный элемент g^{-1}, для которого $g^{-1}g = gg^{-1} = I$* (существование обратного элемента).

Из предыдущего ясно, что все преобразования Лоренца с указанной операцией умножения образуют группу. Эта группа обозначается через L и называется *полной группой Лоренца* (в отличие от некоторых заключенных в ней меньших групп (*подгрупп*), описываемых ниже).

Вращения и бусты. Вернемся к первоначальному определению преобразований Лоренца. Задание начала отсчета O и базиса (e_α) позволяет приписать каждой точке P пространства Минковского (и тем самым каждому событию) пространственно-временные координаты $(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$ по формуле

$$\overrightarrow{OP} = x^\alpha e_\alpha. \qquad (1.32)$$

Таким образом, O и (e_α) задают *систему отсчета*. Такие системы отождествляются, при произвольном выборе точки O и псевдоортонормированного базиса (e_α), со всевозможными *инерциальными системами* *отсчета* в смысле специальной теории относительности. Говорят, что наблюдатель покоится в данной системе отсчета, если все моменты его жизни — события с одними и теми же координатами x^1, x^2, x^3 относительно этой системы. Выбор системы отсчета означает, что события рассматриваются с точки зрения наблюдателя, покоящегося в этой системе отсчета. С этой точки зрения всевозможные линейные комбинации векторов e_1, e_2, e_3 составляют «обычное» трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$, в котором скалярное произведение Минковского (после перемены знака) задает евклидову геометрию: $-(x, x) \geqslant 0$; векторы же, кратные e_0, образуют «временну́ю ось». Конечно, такое разложение пространства Минковского на «пространственную» трехмерную плоскость и «временну́ю» прямую не имеет объективного физического смысла; оно зависит от выбора системы отсчета или, геометрически, системы координат в $\mathcal{M}$. Однако с помощью этого разложения удобно исследовать строение группы Лоренца.

Заметим прежде всего, что преобразования Лоренца Λ, сохраняющие временну́ю прямую и направление времени, т. е. такие, что $\Lambda e_0 = e_0$, переводят $\mathbb{R}^3$ в себя; в самом деле, из $(x, e_0) = 0$ следует $(\Lambda x, \Lambda e_0) = 0$, т. е. $(\Lambda x, e_0) = 0$. Тем самым, такие преобразования Лоренца суть *вращения* евклидова пространства $\mathbb{R}^3$; мы будем обозначать их буквами R, R_1, R', ... Всевозможные такие вращения образуют группу, входящую как часть в группу L, т. е. *подгруппу* L. Эта группа обозначается $O(3)$ и называется (полной) *группой вращений*. Вращения с определителем 1, т. е. переводящие базис (e_1, e_2, e_3) в базис $\mathbb{R}^3$ той же ориентации, называются *собственными* вращениями и составляют *подгруппу* $O(3)$, обозначаемую через $SO(3)$ [1]. Вращения с определителем -1 не составляют группы, так как их произведение уже имеет определитель 1. Легко показать, что группа $SO(3)$ *связна*, т. е. каждое собственное вращение можно перевести в любое другое собственное вращение непрерывным изменением. В самом деле,

[1] Происхождение обозначений: O — Orthogonal, SO — Special Orthogonal.

по теореме Эйлера каждое собственное вращение, кроме тождественного, имеет однозначно определенную ось вращения n и угол вращения φ вокруг этой оси. Сохраняя n и уменьшая φ до нуля, можно перевести каждое собственное вращение в тождественное, а затем, обратной процедурой, в любое другое. Другая часть группы $O(3)$, состоящая из несобственных вращений, не может быть связана с $SO(3)$ непрерывным изменением, так как знак определителя $\det R$ при таком изменении не меняется; однако и эта часть связна. Чтобы в этом убедиться, заметим, что оператор пространственного отражения P (см. (1.24)) переводит эту часть в $SO(3)$ и обратно, так как $\det(\mathsf{P}R) = -\det R$. Поэтому для несобственных вращений R_1, R_2 достаточно непрерывным изменением перевести $\mathsf{P}R_1$ в $\mathsf{P}R_2$, а затем применить оператор P ко всем промежуточным вращениям.

Итак, $O(3)$ распадается на две компоненты связности, одна из которых, содержащая тождественное вращение I, есть $SO(3)$.

По отношению к заданному базису (точнее, к заданному выбору временно́й оси, и, тем самым, пространственной трехмерной плоскости $\mathbb{R}^3$) определяется также другой тип преобразований Лоренца — *бусты* [1]). Пусть $\tilde{e}$ — произвольный ненулевой вектор из $\mathbb{R}^3$. Собственное ортохронное преобразование Лоренца, не меняющее всех векторов, ортогональных плоскости $(e_0, \tilde{e})$, называется бустом в этой плоскости.

Пусть Λ — произвольное собственное ортохронное преобразование Лоренца. Тогда, как мы покажем, Λ можно однозначным образом разложить в произведение буста и собственного вращения

$$\Lambda = BR. \tag{1.33}$$

В самом деле, пусть $\Lambda e_0 = e_0'$. Если $e_0' = e_0$, достаточно взять $B = I$, $R = \Lambda$. Случай $\Lambda e_0 = -e_0$ исключается, поскольку для ортохронного Λ должно быть

[1]) Boost (англ. разг.) — подталкивание, разгонка. В прошлом «бусты» назывались «преобразованиями Лоренца в узком смысле». Мы применяем, не без колебания, термин, уже утвердившийся в журнальной литературе.

$(\Lambda e_0, e_0)=\Lambda_0^0>0$. Если $e_0'\neq\pm e_0$, то векторы e_0, e_0' линейно независимы и, следовательно, задают двумерную плоскость в $\mathcal{M}$. Возьмем в этой плоскости вектор $\tilde{e}$, ортогональный e_0, и примем его за базисный вектор e_1. Тогда имеем разложение $e_0'=\lambda e_0+\mu e_1$; здесь $\lambda=(\Lambda e_0, e_0)>0$ и $(e_0', e_0')=(\Lambda e_0, \Lambda e_0)=(e_0, e_0)=1$, откуда $\lambda^2-\mu^2=1$; следовательно, существует единственное значение ϑ, для которого $\lambda=\operatorname{ch}\vartheta$, $\mu=\operatorname{sh}\vartheta$. Обозначив соответствующий буст из первой формулы (1.25) (взятой со знаком плюс) через B и положив $R=B^{-1}\Lambda$, имеем $Re_0=e_0$, так что R — вращение, и разложение (1.33) существует. Единственность его получается следующим образом. Если $\Lambda=BR=B_1R_1$, то $B_1^{-1}B=R_1R^{-1}$, и $B_1^{-1}B$ оказывается вращением: $B_1^{-1}Be_0=e_0$. Но тогда $Be_0=B_1e_0$, и вектор e_0' для обоих бустов один и тот же, откуда $B=B_1$, а значит, и $R=R_1$.

Существует также однозначное разложение

$$\Lambda=RB. \tag{1.34}$$

Чтобы найти такое разложение, достаточно представить Λ^{-1} в виде $B'R'$, откуда следует (1.34), с $R=R'^{-1}$, $B=B'^{-1}$.

Заметим, что бусты не образуют группы: хотя для каждого буста B обратное преобразование снова буст, произведение двух бустов, вообще говоря, не является бустом. Напомним еще раз, что самые понятия вращения и буста зависят от выбора системы отсчета: само по себе преобразование Лоренца не является ни тем, ни другим, но данный наблюдатель может его рассматривать в некоторых случаях как вращение или буст; другой же наблюдатель определит эти понятия иначе.

Четыре компоненты связности. Группа Лоренца L разбивается на четыре части следующим образом (ср. (1.21)—(1.23)):

$$\begin{array}{llll}
L_+^\uparrow & \text{состоит из } \Lambda, \text{ у которых} & \det\Lambda=1, & \Lambda_0^0>0;\\
L_-^\uparrow & \qquad\qquad \Lambda & \det\Lambda=-1, & \Lambda_0^0>0;\\
L_+^\downarrow & \qquad\qquad \Lambda & \det\Lambda=1, & \Lambda_0^0<0;\\
L_-^\downarrow & \qquad\qquad \Lambda & \det\Lambda=-1, & \Lambda_0^0<0.
\end{array} \tag{1.35}$$

Очевидно, $L_+^\uparrow$ и $L_-^\uparrow$ вместе образуют подгруппу $L^\uparrow$ группы Лоренца (именуемую *ортохронной* группой, т. е. сохраняющей направление времени). Это название объясняется тем, что если системы отсчета (e_α), (e'_α) связаны преобразованием с $\Lambda_0^0 > 0$, то $\frac{\partial t'}{\partial t} > 0$, т. е. при фиксированных x^1, x^2, x^3 и $t_1 < t_2$ будет также $t'_1 < t'_2$.

Далее $L_+^\uparrow$ и $L_+^\downarrow$ вместе образуют подгруппу L_+ группы Лоренца (именуемую *собственной* группой Лоренца). Общая часть $L^\uparrow$ и L_+, т. е. $L_+^\uparrow$, называется *специальной* группой Лоренца. Наконец, $L_+^\uparrow$ и $L_-^\downarrow$ вместе образуют *ортохорную* группу Лоренца L_0[1]).

Покажем, что каждая из частей (1.35) группы Лоренца связна. Для этого воспользуемся преобразованиями P, T (см. (1.24)). Так как $L_-^\uparrow = \mathsf{P}L_+^\uparrow$, $L_+^\downarrow = \mathsf{PT}L_+^\uparrow$, $L_-^\downarrow = \mathsf{T}L_+^\uparrow$, достаточно установить связность специальной подгруппы $L_+^\uparrow$. Для специального преобразования Лоренца Λ имеем разложение (1.33), где буст B задается некоторым значением ϑ (см. (1.25)). Непрерывным изменением ϑ можно перевести этот буст в тождественное преобразование I $(\vartheta = 0)$. Тогда Λ перейдет во вращение R с положительным определителем, как и Λ. Остается непрерывным изменением перевести R в I. Итак, специальные преобразования Λ непрерывным изменением переводятся в I, а тем самым и друг в друга.

Активное и пассивное истолкование преобразований Лоренца. Мы определили преобразования Лоренца Λ как преобразования, переводящие векторы пространства Минковского в другие векторы; координатное описание Λ зависит от выбора базиса (e_α), но само преобразование существует независимо от базиса, поскольку векторы $\mathscr{M}$ считаются индивидуальными объектами, имеющими независимый от способа описания смысл.

Наряду с описанным «активным» истолкованием имеется другое, исторически ему предшествовавшее истолкование преобразований Лоренца — «пассивное». Системой отсчета в пространстве Минковского $\mathscr{M}$,

---

[1]) Этот термин означает: «сохраняющая знак объема». Имеется в виду знак определителя $\det|\Lambda_i^j|$, $i, j = 1, 2, 3$.

как мы уже знаем, называется совокупность фиксированной точки O (начала отсчета) и базиса (e_α). Физический смысл системы отсчета состоит в том, что каждому событию P приписывается четыре координаты x^α по уже указанному правилу (1.32); иначе говоря, задание системы отсчета означает указание определенного способа измерения пространственно-временных координат [1]). Такой способ измерения естественно приписать наблюдателю, покоящемуся в этой системе отсчета.

Переход к другой системе отсчета с началом O' и базисом (e_α') означает, что той же точке P приписываются новые координаты x'^α:

$$\overrightarrow{OP} = x'^\alpha e'_\alpha. \tag{1.36}$$

Сравнивая это с (1.32) и принимая во внимание (1.16), имеем

$$x^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x'^\beta + a^\alpha, \tag{1.37}$$

где a^α — координаты «нового» начала O' в «старом» базисе (e_α).

При неизменном начале $(O' = O)$ замена системы отсчета задается, таким образом, преобразованием Лоренца Λ, переводящим e_α в e'_α $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$. Это и есть «пассивное» истолкование преобразований Лоренца. Если же меняется и начало отсчета, мы приходим к «неоднородным преобразованиям Лоренца» (1.37), также составляющим группу. Эта группа, теперь чаще именуемая группой Пуанкаре, рассматривается в § 2.

«Активная» и «пассивная» точки зрения математически равносильны, но в случае других групп, не связанных непосредственно с преобразованиями пространства-времени, исчезает связь между «пассивным»

---

[1]) В этой книге, опирающейся лишь на специальную теорию относительности, рассматриваются только инерциальные системы отсчета в смысле этой теории. Следует отметить далее, что неортохронные преобразования Лоренца (изменяющие направление времени) не могут быть связаны с переходом к другому наблюдателю и нуждаются в ином физическом истолковании.

истолкованием и позицией наблюдателя. Поэтому в дальнейшем все преобразования, если не оговорено противное, будут пониматься в активном смысле, т. е. как преобразования векторов в другие векторы.

§ 2. Группа Пуанкаре

Определение группы. Мы определили группу Лоренца как группу всех преобразований пространства Минковского $\mathscr{M}$, оставляющих неподвижной фиксированную точку O и сохраняющих интервалы. Если не требовать неподвижности какой-либо точки, мы приходим к наиболее общим преобразованиям пространства $\mathscr{M}$, сохраняющим интервалы. Все такие преобразования составляют группу, называемую *группой Пуанкаре* [1]). Проверка групповых свойств не составляет труда: если два преобразования сохраняют интервалы между точками $\mathscr{M}$, то их произведение, т. е. результат их последовательного выполнения, также сохраняет интервалы; тождественное преобразование сохраняет интервалы и играет роль единицы при умножении преобразований; наконец, обратное преобразование (существование которого можно вывести из сохранения интервалов, или просто предположить, если не углубляться в математику) также сохраняет интервалы. Обозначим группу Пуанкаре через $\mathscr{P}$.

Пространство Минковского однородно по отношению к группе Пуанкаре, т. е. все точки его равноправны, что соответствует равноправию событий в теории относительности. Мы можем, однако, закрепить некоторую точку O для удобства описания преобразований и изображать точки пространства $\mathscr{M}$ их радиусами-векторами по отношению к этой точке:

$$x = \overrightarrow{OP}. \tag{2.1}$$

Тогда в группе $\mathscr{P}$ выделяется подгруппа всех преобразований Λ, сохраняющих неподвижной точку O; согласно определению § 1, это группа Лоренца L.

---

[1]) В старой литературе эта группа называлась «неоднородной группой Лоренца».

Далее мы обнаруживаем в группе $\mathscr{P}$ *подгруппу сдвигов*, или *трансляций*:

$$T_a x = x + a, \tag{2.2}$$

где a — постоянный вектор. В самом деле (см. (1.2)),

$$I(T_a x,\ T_a y) = (\overrightarrow{T_a x T_a y},\ \overrightarrow{T_a x T_a y}) = (\overrightarrow{xy},\ \overrightarrow{xy}) = I(x,\ y).$$

Последовательное выполнение преобразования Лоренца Λ и сдвига T_a приводит к преобразованию

$$x \to \Lambda x + a, \tag{2.3}$$

принадлежащему группе Пуанкаре; докажем, что такой вид имеют все преобразования группы. В самом деле, если Γ принадлежит $\mathscr{P}$, положим $a = \overrightarrow{O\Gamma(O)}$; тогда $T_{-a}\Gamma$ сохраняет не только интервалы, но и точку O и тем самым является преобразованием Лоренца Λ; следовательно, $\Gamma = T_a\Lambda$, т. е. Γ имеет вид (2.3). Обозначим преобразование (2.3) с помощью упорядоченной пары $(a,\ \Lambda)$. Тогда умножение преобразований $(a,\ \Lambda)$, $(b,\ M)$ задается соотношениями

$$x' = \mathrm{M}x + b, \quad x'' = \Lambda x' + a,$$

откуда

$$x'' = \Lambda \mathrm{M} x + (\Lambda b + a).$$

Тем самым произведение

$$(a,\ \Lambda)(b,\ \mathrm{M}) = (\Lambda b + a,\ \Lambda\mathrm{M}). \tag{2.4}$$

Мы видим, что закон умножения в группе Пуанкаре сводится к умножению в группе Лоренца и действию этой группы в $\mathscr{M}$. Из (2.4) легко находится обратный элемент:

$$(a,\ \Lambda)^{-1} = (-\Lambda^{-1}a,\ \Lambda^{-1}). \tag{2.5}$$

В базисе (e_α) преобразования группы Пуанкаре записываются неоднородными линейными уравнениями

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta + a^\alpha. \tag{2.6}$$

Подгруппа Лоренца L состоит из всех пар $(0,\ \Lambda)$, подгруппа сдвигов $\mathscr{T}$ — из всех пар $(a,\ I)$. Заметим, что $\mathscr{T}$ — *абелева группа*, т. е. сдвиги между собой перестановочны:

$$(a, I)(b, I)=(b, I)(a, I)=(a+b, I).$$

Четыре компоненты связности. Любое преобразование (a, Λ) можно перевести в $(0, \Lambda)$ непрерывным уменьшением вектора a. Поэтому группа $\mathscr{P}$ имеет столько же компонент связности, сколько и L. Обозначим компоненты, содержащие $L_+^\uparrow$, $L_-^\uparrow$, $L_+^\downarrow$, $L_-^\downarrow$, соответственно через $\mathscr{P}_+^\uparrow$, $\mathscr{P}_-^\uparrow$, $\mathscr{P}_+^\downarrow$, $\mathscr{P}_-^\downarrow$.

Закон преобразования полей. Системы, описываемые в пространстве-времени и играющие главную роль в этой книге, — это поля. В этом параграфе речь будет о классических (неквантованных) полях. По определению, *классическое поле есть вектор-функция с комплексными (в частных случаях — действительными) значениями, заданная в пространстве Минковского*. Таким образом, поле $\psi=\psi(x)$ сопоставляет каждой точке x вектор некоторого векторного пространства V, размерность которого обозначим через n[1]). Выберем в V базис из n независимых векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$; тогда вектор-функция $\psi(x)$ выражается через n скалярных функций:

$$\psi(x)=\sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(x) v_\nu. \qquad (2.7)$$

Поле чаще всего изображается в виде столбца из функций $\psi_\nu(x)$, называемых компонентами поля.

В нашу задачу входит лишь описание возможных полей, но не их взаимодействий; поэтому все поля, рассматриваемые в этой книге, относятся к категории «свободных полей». Как уже было отмечено в предисловии, при описании взаимодействий вводятся те же типы полей. Перечень всех возможных полей и их классификация определяются способом их преобразования под действием группы Пуанкаре; точнее, самое понятие поля неразрывно связано с определенными трансформационными свойствами, которые и будут главным предметом дальнейшего изложения.

---

[1]) Подробнее о комплексных векторных пространствах см. в § 3.

Что значит «преобразовать поле» согласно некоторому преобразованию (a, Λ) из группы Пуанкаре? Здесь опять можно придерживаться одной из двух точек зрения, активной или пассивной. «Активная» точка зрения состоит в том, что от данного поля переходят к другому по правилу, связанному с заданным преобразованием Лоренца Λ и заданным сдвигом a. Если Λ сводится к пространственному вращению R, физический смысл правила состоит в том, что «источники» поля в любой момент времени должны быть подвергнуты вращению R и сдвигу a; если же Λ является бустом, то «источники» должны получить в любой момент времени добавочную составляющую скорости $\boldsymbol{v}$, соответствующую по величине и направлению этому бусту (ср. (1.26)). (Отсюда понятен и самый термин «буст»). Конечно, при этом не имеется в виду фактически изменить движение «источников» поля, что привело бы к не учитываемым здесь динамическим эффектам; речь идет о формальном переходе к другой системе «источников», движение которой определенным способом связано с движением данной. Как мы увидим, математическое описание преобразования поля не требует каких-либо представлений о его «источниках», которые и не будут играть роли в дальнейшем.

Условно можно говорить о «движениях» поля в том же смысле, в каком рассматриваются движения системы материальных точек в элементарной кинематике, т. е. вне зависимости от причин, вызывающих такие «движения». Таким образом, все относящееся к трансформационным свойствам полей можно назвать *кинематикой полей*. Ввиду фундаментального характера общей теории поля эта кинематика зависит только от основной группы преобразований и, в известном смысле, проще элементарной кинематики, где на систему накладываются феноменологически заданные «связи».

Пассивная точка зрения на преобразования полей состоит в том, что *одно и то же* поле рассматривается в другой системе отсчета. Ясно, что она равносильна активной, так как отношение между «приведенным в движение» полем и данным наблюдателем то же, что между прежним полем и новым наблюдателем, движущимся относительно первого со скоростью $-\boldsymbol{v}$. Поэтому всевозможные «состояния движения» данного поля, как они представляются *данному* наблюдателю, совпадают с восприятиями одного и того же «состояния движения», отмеченными *всевозможными* наблюдателями. Этих простых соображений достаточно, чтобы прийти к общему закону преобразования полей.

Предположим, что имеется две системы отсчета соответственно с координатами x^α, x'^α, «старая» и «новая». Пусть одно и то же поле описывается «старым» наблюдателем функциями $\psi_\beta(x^0, x^1, x^2, x^3)$, а «новым» — функциями $\psi'_\alpha(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$. Тогда значения $\psi_\beta(x)$ полностью определяют значения $\psi'_\alpha(x')$, так как физически x и x' соответствуют одному событию в пространстве-времени. Итак, $\psi'_\alpha(x')$ должны выражаться через $\psi_\beta(x)$. Простейшее возможное выражение — линейное, что соответствует опыту описания всех полей, удовлетворяющих *линейным* динамическим уравнениям: такие уравнения не могли бы сохранять свой вид при нелинейных преобразованиях полей [1]).

Следовательно, при переходе от первого наблюдателя ко второму происходит преобразование описываемых ими полей по закону

$$\psi'_\alpha(x') = \sum_\beta D_{\alpha\beta}\psi_\beta(x). \tag{2.8}$$

Обозначим через (b, M) преобразование пространства $\mathscr{M}$, соответствующее переходу от первой системы отсчета ко второй. Предположим, что матрица $D_{\alpha\beta}$ зависит лишь от преобразования Лоренца M, входящего в преобразование Пуанкаре $x' = \mathrm{M}x + b$, но не от сдвига b, т. е. что сдвиг влияет лишь на аргументы поля, но не вызывает преобразования его компонент. Тогда зависимость $D_{\alpha\beta}$ от (b, M) можно записать в виде $D_{\alpha\beta}[\mathrm{M}]$. При переходе от второй системы отсчета

[1]) Мы оставляем в стороне случай нелинейного («сильного») гравитационного поля; это поле, стоящее в физике особняком, вызывает особые трудности при попытках его «квантования».

к третьей, связанной со второй преобразованием (a, Λ), имеем

$$\psi''_\gamma(x'') = \sum_\alpha D_{\gamma\alpha}[\Lambda]\,\psi'_\alpha(x').$$

Сопоставляя обе формулы, получаем

$$\psi''_\gamma(x'') = \sum_{\alpha,\beta} D_{\gamma\alpha}[\Lambda]\,D_{\alpha\beta}[\mathrm{M}]\,\psi_\beta(x).$$

С другой стороны, при непосредственном переходе от первой системы к третьей находим

$$\psi''_\gamma(x'') = \sum_\beta D_{\gamma\beta}[\Lambda\mathrm{M}]\,\psi_\beta(x);$$

отсюда

$$D_{\gamma\beta}[\Lambda\mathrm{M}] = \sum_\alpha D_{\gamma\alpha}[\Lambda]\,D_{\alpha\beta}[\mathrm{M}]. \qquad (2.9)$$

Это значит, что при перемножении преобразований (a, Λ), (b, M) соответствующие им матрицы D перемножаются в том же порядке. Как мы увидим, эта ситуация имеет чрезвычайно важное значение для описания полей. Полагая, наконец, $x' = \Lambda x + a$, имеем

$$\psi'_\alpha(\Lambda x + a) = \sum_\beta D_{\alpha\beta}[\Lambda]\,\psi_\beta(x). \qquad (2.10)$$

Подставим в эту формулу x вместо $\Lambda x + a$; тогда из нее находятся компоненты преобразованных полей в точке x:

$$\psi'_\alpha(x) = \sum_\beta D_{\alpha\beta}[\Lambda]\,\psi_\beta(\Lambda^{-1}(x - a)). \qquad (2.11)$$

Таков закон преобразования полей, когда новая система отсчета связана со старой преобразованием (2.6).

Представления группы Пуанкаре. Свойства матриц $D[\Lambda]$, задающих преобразования компонент поля, составляют частный случай важного алгебраического понятия *представления группы*. Как мы видели, задание преобразования Лоренца Λ определяет матрицу $D(\Lambda)$, т. е. преобразование в векторном пространстве поля V. Эта ситуация встречается очень часто: элементы некоторой группы допускают «реализацию» в виде преобразований (или, что то же, операторов), действующих на какие-либо объекты, образующие векторное пространство — поля, векторы состояния и т. п.

Общее определение представления состоит в следующем. Пусть каждому элементу g группы G поставлен в соответствие оператор T_g, действующий в некотором векторном пространстве V. Говорят, что соответствие $g \to T_g$ есть *представление группы G в векторном пространстве V*, если выполнены следующие условия:

(1) Пусть в группе G элемент $g_3 = g_1 g_2$; тогда оператор $T_{g3} = T_{g1} T_{g2}$, т. е. оператор T_{g3}, получается последовательным выполнением T_{g2}, а затем T_{g1}.

(2) Единичному элементу I группы G соответствует тождественный оператор: $T_I = 1$.

Первое из этих требований означает, что строение группы воспроизводится умножением операторов T_g: каждый элемент группы «изображается» оператором, причем умножению элементов отвечает умножение операторов в том же порядке. Второе требование обеспечивает обратимость операторов T_g. В самом деле, $g^{-1}g = I$, откуда в силу (1) $T_{g^{-1}} T_g = 1$; но это и означает, что оператор $T_{g^{-1}}$ обратен T_g. В частности, ни один оператор T_g не равен нулю (т. е. не переводит все векторы V в нулевой). Наиболее важен случай, когда различным элементам g соответствуют разные операторы T_g; в этом случае представление называется *точным*, и между исходной группой G и ее операторной реализацией $\{T_g\}$, с алгебраической стороны, имеется полное тождество (*изоморфизм*).

Поскольку матрицы $D[\Lambda]$ задают операторы в пространстве V, соблюдается условие $D[\Lambda M] = D[\Lambda] \times \times D[M]$ (2.9) и тождественному преобразованию Лоренца, очевидно, отвечает тождественное преобразование $D[I] = 1$, то определенное выше соответствие $D[\Lambda]$ есть представление группы Лоренца L в пространстве V. *Размерностью* (или *степенью*) этого представления называется размерность пространства представления, т. е. в нашем случае n.

Покажем теперь, что формула (2.11) задает представление группы Пуанкаре $\mathscr{P}$ в пространстве полей $\{\psi\}$. Здесь имеется в виду не конечномерное векторное пространство V, которому принадлежат значения полей ψ в отдельных точках, а пространство векторфункций $\psi(x)$. Это пространство *бесконечномерно*, т. е. базис, по которому можно разложить все векторфункции $\psi(x)$, необходимо содержит бесконечное число $\psi^{(k)}(x)$. Поэтому и представление (2.11) называется *бесконечномерным*. Условие (2), очевидно, выполнено; проверим условие (1). Пусть $(c, \mathrm{N})=(a, \Lambda)(b, \mathrm{M})$; тогда элементам группы Пуанкаре (b, M), (a, Λ) сопоставляются последовательные преобразования поля:

$$\psi'_\gamma(x)=\sum_\beta D_{\gamma\beta}[\mathrm{M}]\,\psi_\beta(\mathrm{M}^{-1}(x-b)),$$

$$\psi''_\alpha(x)=\sum_\gamma D_{\alpha\gamma}[\Lambda]\,\psi'_\gamma(\Lambda^{-1}(x-a)).$$

Подставляя в первую из этих формул вместо x точку $\Lambda^{-1}(x-a)$, находим

$$\begin{aligned}\psi'_\gamma(\Lambda^{-1}(x-a))&=\sum_\beta D_{\gamma\beta}[\mathrm{M}]\,\psi_\beta(\mathrm{M}^{-1}(\Lambda^{-1}(x-a)-b))=\\&=\sum_\beta D_{\gamma\beta}[\mathrm{M}]\,\psi_\beta(\mathrm{M}^{-1}\Lambda^{-1}x-\mathrm{M}^{-1}\Lambda^{-1}a-\mathrm{M}^{-1}b),\\ \psi''_\alpha(x)&=\sum_{\gamma,\beta} D_{\alpha\gamma}[\Lambda]\,D_{\gamma\beta}[\mathrm{M}]\,\psi_\beta(\mathrm{M}^{-1}\Lambda^{-1}(x-(\Lambda b+a))).\end{aligned}$$

По определению умножения в группе $\mathscr{P}$ (2.4), $\Lambda\mathrm{M}=\mathrm{N}$, $\mathrm{M}^{-1}\Lambda^{-1}=\mathrm{N}^{-1}$, $\Lambda b+a=c$, откуда в силу (2.9) имеем

$$\psi''_\alpha(x)=D^\beta_\alpha[\mathrm{N}]\,\psi_\beta(\mathrm{N}^{-1}(x-c)).$$

Но это и есть преобразование поля, соответствующее (c, N), что и доказывает свойство представления (1).

Дискретные преобразования. Мы уже описали два важных преобразования, входящих в группу Лоренца (и тем самым в группу Пуанкаре): пространственное отражение P и обращение времени T. Первое из них задается формулой

$$\mathsf{P}(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3), \qquad (2.12)$$

имеет определитель -1 и сохраняет направление времени. Второе задается формулой

$$\mathsf{T}(x^0, x^1, x^2, x^3) = (-x^0, x^1, x^2, x^3), \qquad (2.13)$$

также имеет определитель -1 и меняет направление времени на обратное.

Произведение $\mathsf{PT} = \mathsf{TP}$ имеет вид

$$\mathsf{PT}(x^0, x^1, x^2, x^3) = (-x^0, -x^1, -x^2, -x^3); \qquad (2.14)$$

оно меняет направление времени, а определитель его равен 1.

Действие этих преобразований на поля описывается общим правилом (2.11) и зависит от представления группы Лоренца $D[\Lambda]$. Мы вернемся к этому вопросу, когда изучим представления группы Лоренца.

Точность представлений. Представление группы Пуанкаре полями произвольного вида (2.7), как легко видеть, *точно*, т. е. разным элементам группы (a, Λ) соответствуют разные преобразования полей (2.11). Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть действие различных преобразований (a, Λ) и (b, M) на поле, сосредоточенное вблизи некоторой точки x, и выбрать эту точку таким образом, чтобы было $\Lambda x + a \neq \mathrm{M}x + b$. Тогда из одного и того же поля получаются два разных, так что преобразования полей различны.

§ 3. Спиноры и бинарная группа

Мотивировка спинорной алгебры. Мы приведем классическую мотивировку введения спиноров, следуя в основном Вейлю [6].

Предположим, что имеется система, состояния которой описываются векторами некоторого конечномерного векторного пространства V. Такой системой может быть, например, спин некоторого рода частиц, например электронный спин, открытый Уленбеком и Гаудсмитом и теоретически осмысленный Паули, а затем, с релятивистских позиций, Дираком. Когда мы берем спин в качестве «системы», то отвлекаемся от всех других свойств рассматриваемой частицы, например от ее положения в пространстве-времени. Такой подход вполне законен, точно так же как законно, в известных пределах, описание частицы лишь в пространственно-временных терминах, без учета спина.

Однако уже простейшие опыты с электронным спином показали, что в разных системах отсчета спин одной и той же частицы описывается по-разному, т. е. две комплексные компоненты, задающие спиновое состояние системы, оказываются различными для разных релятивистских наблюдателей. Таким образом, при изменении системы отсчета в обычном пространстве-времени одновременно происходит преобразование комплексного вектора спинового состояния.

Поскольку для каждой системы отсчета вектор спинового состояния, как и всякий вектор состояния в квантовой теории, определяется лишь с точностью до фазового множителя $e^{i\alpha}$ (α действительно), следует ожидать, что двум последовательным преобразованиям системы отсчета соответствует два последовательно выполненных в том же порядке преобразования векторов спинового состояния, заданных с точностью до фазовых множителей. Пользуясь терминологией, принятой в современной квантовой механике, мы можем считать, что состояние квантовой системы задается не одним вектором комплексного пространства, а целым *лучом* таких векторов — системой векторов, отличающихся друг от друга ненулевыми комплексными множителями. Тогда вместо преобразования векторов состояния, определенных с точностью до фазовых множителей, можно говорить о преобразовании лучей в пространстве векторов состояния (в математической литературе такие преобразования называются *проективными*). Пусть теперь каждому преобразованию группы G поставлено в соответствие преобразование лучей спинового пространства, причем произведению преобразований из группы соответствует произведение преобразований лучей в том же порядке, а тождественному преобразованию — тождественное преобразование лучей. Тогда говорят, что задано *проективное представление* группы G в пространстве спиновых состояний.

Поскольку «обычные» представления групп линейными преобразованиями векторов, введенные в § 2, проще поддаются изучению, чем проективные представления (именно благодаря линейности представляющих операторов T_g), было бы выгодно построить для той же группы G «обычное» представление $\{T_g\}$, заменяющее проективное в следующем смысле: если вектор v принадлежит лучу $\hat{v}$ и $T_g v = w$, то w принадлежит лучу, получаемому из $\hat{v}$ преобразованием заданного проективного представления. Если бы такая замена была возможна, то представляющие операторы T_g давали бы полную информацию о проективных преобразованиях, отвечающих всем элементам G, т. е. о преобразованиях самих спиновых состояний системы.

Оказывается, в такой формулировке задача о построении представлений, вообще говоря, неразрешима. Уже в случае электронного спина, когда векторы спиновых состояний имеют две компоненты и, следовательно, пространство спиновых состояний двумерно, однозначного представления группы вращений (и, тем более, группы Пуанкаре) в этом пространстве не существует. Мы увидим, однако, что можно построить в этом случае двузначное представление, вполне приемлемое с точки зрения преобразования физических состояний, хотя и неприятное в алгебраическом смысле.

Начнем с группы вращений $SO(3)$ и попытаемся представить вращения линейными преобразованиями векторов с комплексными координатами ξ^1, ξ^2. Прием, ведущий к решению этой задачи, был известен в математике задолго до возникновения квантовой механики. Этот прием исходит из так называемой «стереографической проекции», играющей важную роль в теории функций комплексного переменного.

Построим в трехмерном евклидовом пространстве сферу S единичного радиуса и примем центр этой сферы за начало декартовой системы координат (x, y, z). Будем рассматривать экваториальную плоскость (x, y) сферы S как плоскость комплексного переменного $\zeta=x+iy$. Для каждой точки ζ этой плоскости построим луч, соединяющий эту точку с южным полюсом сферы (0, 0, —1), и пересечем этот луч со сферой S. Стереографическая проекция ставит в соответствие точке ζ полученную в пересечении точку сферы (x, y, z). Легко подсчитать, что координаты проекции выражаются через ζ формулами

$$x+iy=\frac{2\zeta}{1+\bar{\zeta}\zeta}, \quad x-iy=\frac{2\bar{\zeta}}{1+\bar{\zeta}\zeta}, \quad z=\frac{1-\bar{\zeta}\zeta}{1+\bar{\zeta}\zeta},$$

или

$$x=\frac{\zeta+\bar{\zeta}}{1+\bar{\zeta}\zeta}, \quad y=\frac{1}{i}\frac{\zeta-\bar{\zeta}}{1+\bar{\zeta}\zeta}, \quad z=\frac{1-\bar{\zeta}\zeta}{1+\bar{\zeta}\zeta}; \tag{3.1}$$

здесь и в дальнейшем черта сверху означает комплексное сопряжение.

Чтобы включить в это соответствие также и южный полюс сферы, введем *однородные координаты* на комплексной плоскости ζ: каждую точку ζ будем описывать любой парой комплексных чисел (ξ^1, ξ^2), для которой $\xi^1/\xi^2=\zeta$, парами же вида (ξ^1, 0), $\xi^1\neq0$, будем описывать «бесконечно удаленную точку» плоскости ζ. Тогда южный полюс сферы сопоставляется «бесконечно удаленной точке» и устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками сферы S и точками «расширенной» комплексной плоскости (с включением «бесконечно удаленной точки»).

В качестве однородных координат используются лишь такие пары (ξ^1, ξ^2), для которых $\xi^1\bar{\xi}^1+\xi^2\bar{\xi}^2\neq0$; нормируем однородные координаты условием $\xi^1\bar{\xi}^1+\xi^2\bar{\xi}^2=1$. Тогда формулы стереографической проекции принимают вид

$$x+iy=2\xi^1\bar{\xi}^2, \quad x-iy=2\xi^2\bar{\xi}^1, \quad z=\xi^1\bar{\xi}^1-\xi^2\bar{\xi}^2. \tag{3.2}$$

Линейное преобразование однородных координат

$$\xi'^1=u_1^1\xi^1+u_2^1\xi^2, \quad \xi'^2=u_1^2\xi^1+u_2^2\xi^2, \tag{3.3}$$

сохраняющее нормировку, т. е. удовлетворяющее условию

$$\xi'^1\bar{\xi}'^1 + \xi'^2\bar{\xi}'^2 = \xi^1\bar{\xi}^1 + \xi^2\bar{\xi}^2, \tag{3.4}$$

называется *унитарным*. Поскольку

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + iy)(x - iy) + z^2 = (\xi^1\bar{\xi}^1 + \xi^2\bar{\xi}^2)^2,$$

такие преобразования вызывают линейные преобразования координат x, y, z, сохраняющие квадратичную форму $x^2+y^2+z^2$, т. е. вращения.

Как можно показать, любое унитарное преобразование (3.3) получается из тождественного ($\xi'^1 = \xi^1$, $\xi'^2 = \xi^2$) непрерывным изменением коэффициентов u^μ_ν, причем в процессе изменения преобразование (u^μ_ν) все время остается унитарным. Тогда и соответствующее вращение меняется непрерывно и, значит, все время остается *собственным* вращением. Как нетрудно проверить, таким способом можно получить собственное вращение сферы S, переводящее любую ее точку с заданным в ней касательным направлением в любую другую точку с заданным в ней направлением; иначе говоря, всевозможным унитарным матрицам (u) ставятся в соответствие всевозможные собственные вращения R. Ясно, что при этом выполнены оба условия, входящие в определение представления (§ 2), и мы получаем представление группы всех унитарных матриц вращениями трехмерного пространства.

Вспомним, однако, что мы исходили из обратной задачи: найти представление группы вращений в двумерном комплексном пространстве. Эта задача, в известном смысле, решается обращением предыдущей процедуры: для каждого вращения R можно взять унитарное преобразование u, порождающее его указанным выше способом. Но такое унитарное преобразование не однозначно; если взять матрицу (u^μ_ν) с обратным знаком, то из нее получается то же вращение R. Впрочем, можно показать, что этим и исчерпывается произвол в выборе u; мы приходим, таким образом, к *двузначному* представлению группы собственных вращений $SO(3)$ в пространстве (ξ^1, ξ^2). Для физических целей этого вполне достаточно, поскольку изменение знака матрицы u не влияет на вызываемое ею преобразование лучей двумерного комплексного пространства, задающих состояния электронного спина.

Как можно показать, *однозначных* представлений группы вращений в двумерном комплексном пространстве (кроме тривиального представления единичной матрицей) вовсе не существует. Полученное двузначное представление называется *спинорным*. Наряду с ним существует еще другое двумерное представление группы вращений, также двузначное, которое получается заменой матрицы (u^μ_ν) на комплексно сопряженную $(\bar{u}^\mu_\nu)$. Ясно, что эта матрица также унитарна и можно показать, что соответствующее представление группы $SO(3)$ не эквивалентно предыдущему, т. е. не существует невырожденной матрицы w, для которой было бы $\bar{u}=wuw^{-1}$. Представление $(\bar{u})$ называется *коспинорным*.

Заметим теперь, что преобразованиям (3.3) соответствуют в плоскости комплексного переменного ζ дробно-линейные преобразования

$$\zeta' = \frac{u^1_1\zeta + u^1_2}{u^2_1\zeta + u^2_2}$$

частного вида, поскольку матрица (u^μ_ν) унитарна. Общие дробно-линейные преобразования получатся, если брать в числителе и знаменателе любые коэффициенты u^μ_ν, для которых $\det|u^\mu_\nu|\neq 0$. Чтобы избежать здесь избыточности в выборе матриц, потребуем, чтобы они были *унимодулярны*, т. е. удовлетворяли условию $\det|u^\mu_\nu|=1$ (такие матрицы называются также *бинарными*). Тогда произвольный множитель в коэффициентах дробно-линейного преобразования устраняется. Ясно, что при несохранении условия нормировки $\xi^1\bar{\xi}^1+\xi^2\bar{\xi}^2=1$ преобразования вида (3.3) уже не задают вращений трехмерного пространства. Однако, вводя однородные координаты

$$x=\frac{x_1}{x_0},\quad y=\frac{x_2}{x_0},\quad z=\frac{x_3}{x_0}$$

и записывая формулы стереографической проекции

(3.1) в виде

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \xi^1\bar{\xi}^1 + \xi^2\bar{\xi}^2, & x_1 &= \xi^1\bar{\xi}^2 + \xi^2\bar{\xi}^1, \\
x_2 &= \frac{1}{i}(\xi^1\bar{\xi}^2 - \xi^2\bar{\xi}^1), & x_3 &= \xi^1\bar{\xi}^1 - \xi^2\bar{\xi}^2,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

легко проверить, что полученные таким способом координаты удовлетворяют уравнению

$$(x_0)^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2 - (x_3)^2 = 0.$$

Тем самым формулы (3.5) сопоставляют каждой точке (ξ^1, ξ^2) двумерного комплексного пространства точку пространства Минковского, лежащую на световом конусе. Можно показать, что таким образом получаются *все* точки светового конуса. Если теперь выполнить преобразование (3.3) с унимодулярной матрицей u, то координаты (x_0, x_1, x_2, x_3) линейным образом преобразуются в (x_0', x_1', x_2', x_3'), также изображающие точку светового конуса. Итак, бинарным преобразованиям u соответствуют линейные однородные преобразования в пространстве Минковского, сохраняющие световой конус, т. е. преобразования Лоренца.

Точно так же, как в случае вращений, проверяется, что этим путем получаются лишь специальные преобразования Лоренца (с $\Lambda_0^0 > 0$ и определителем $+1$), и притом все такие преобразования (что мы докажем в надлежащем месте). Обратно, сопоставляя каждому специальному преобразованию Лоренца Λ порождающее его бинарное преобразование (3.3), мы получаем двузначное представление специальной группы Лоренца $L_+^\uparrow$ в двумерном комплексном пространстве, поскольку каждому Λ соответствует пара унимодулярных матриц $\pm u$, отличающихся знаком. Это представление называется *спинорным*; аналогично задается *коспинорное* представление при помощи матриц $\pm\bar{u}$.

Двузначность представлений с алгебраической точки зрения свидетельствует об искусственности этого построения. Естественно поэтому принять за основную группу вместо группы Лоренца «бинарную группу» — группу унимодулярных преобразований комплексного двумерного пространства, что приводит к значительным упрощениям в построении представлений и тем самым всех возможных полей. С этой точки зрения группа Лоренца $L_+^\uparrow$ рассматривается как специальное (четырехмерное) представление бинарной группы.

Векторы двумерного комплексного пространства (ξ^1, ξ^2) называются *спинорами*. Подобно построению тензоров из векторов «обычного» пространства или пространства Минковского, из спиноров строятся *спинтензоры*, служащие для задания «спин-тензорных» полей. Каждое тензорное (в частности, векторное) поле может быть, как мы увидим, записано в спин-тензорном виде, но обратное неверно.

Таким образом, спинорный анализ включает в себя, как часть, «обычный» тензорный анализ, а спинор оказывается, в некотором смысле, более фундаментальным объектом, чем «вектор» в прежнем смысле этого слова. Один из основоположников спинорной алгебры Ван дер Варден формулировал возникающее здесь положение вещей, иллюстрируемое формулами (3.2), (3.5), несколько парадоксальным образом: «спинор — это квадратный корень из вектора».

Подобно тому, как обычные векторы или векторы пространства Минковского являются математическими объектами, существующими независимо от их координатного описания, спиноры также нуждаются в «инвариантной» трактовке. Такой подход, присущий современной математике, вовсе не означает возврата к схоластическим представлениям вроде «абсолютного пространства и времени». Математика «абсолютизирует» лишь то, что и в природе не зависит от наблюдателя, например «события» или «состояния электронного спина».

Спиноры и коспиноры. Мы переходим теперь к точному определению понятий спинора и коспинора. Определим сначала, по аналогии с действительным векторным пространством, понятие *комплексного векторного пространства*. Так называется множество элементов (именуемых векторами), для которых введены операции сложения и умножения на комплексные числа с соблюдением обычных алгебраических свойств (1.1), где λ, μ означают теперь произвольные комплексные числа. На такие пространства переносится бо́льшая часть построений, выполняемых в действительных векторных пространствах; при этом линейные комбинации векторов берутся с *комплексными* коэффициентами, и в этом смысле понимаются линейная независимость векторов, базис и (комплексная) размерность пространства. Комплексное векторное пространство называется *конечномерным*, если в нем существует базис из конечного числа векторов; в противном случае пространство называется *бесконечномерным*. Бесконечномерны, например, *гильбертовы пространства*, с которыми мы встретимся дальше [1]. Одномерное комплексное векторное пространство может быть просто отождествлено с пространством комплексных чисел, так как любой его вектор выражается в виде кратного базисного вектора ε_1, $z\varepsilon_1$, где z — комплексное число, задающее вектор. Простейшее комплексное векторное пространство, представляющее самостоятельный интерес, следовательно, двумерно; оно называется *спинорным* пространством, а векторы его — *спинорами*. Обозначим спинорное пространство через $\mathbb{C}^2$.

Базис $\mathbb{C}^2$ состоит из двух линейно независимых векторов ε_1, ε_2, по которым каждый спинор ξ разлагается с комплексными коэффициентами ξ^1, ξ^2:

$$\xi = \xi^1\varepsilon_1 + \xi^2\varepsilon_2. \tag{3.6}$$

Координаты спинора ξ^1, ξ^2 зависят от выбора базиса и не имеют физического смысла. Спинор следует рассматривать как индивидуальный геометрический объект (аналогично точке пространства Минковского), могущий изображать некоторые физические состояния, например состояние электронного спина.

Рассмотрим теперь другой экземпляр спинорного пространства, векторы которого будем считать объектами, отличными от векторов $\mathbb{C}^2$; это пространство

---

[1]) Иногда (особенно в математической литературе) понятие гильбертова пространства формулируется таким образом, что оно охватывает и конечномерный случай.

мы назовем *коспинорным* и обозначим его $\dot{\mathbb{C}}^2$, а векторы его назовем *коспинорами* и будем обозначать $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, ... С логической стороны оба пространства вполне равноправны, так что введенная терминология служит лишь для их различения. Предположим, что для спиноров и коспиноров задано скалярное произведение $(\dot{\eta} \mid \xi)$ с комплексными значениями, со следующими свойствами:

(1) $(\dot{\zeta} \mid \lambda\xi + \mu\eta) = \lambda(\dot{\zeta} \mid \xi) + \mu(\dot{\zeta} \mid \eta)$ (линейность относительно спинора);

(2) $(\lambda\dot{\xi} + \mu\dot{\eta} \mid \zeta) = \bar{\lambda}(\dot{\xi} \mid \zeta) + \bar{\mu}(\dot{\eta} \mid \zeta)$ (антилинейность относительно коспинора);

(3) Для любого $\xi \neq 0$ существует такой $\dot{\eta}$, что $(\dot{\eta} \mid \xi) \neq 0$, и для любого $\dot{\eta} \neq 0$ существует такой ξ, что $(\dot{\eta} \mid \xi) \neq 0$ (невырожденность произведения). (3.7)

Подчеркнем, что первый множитель произведения здесь может быть только коспинором, а второй — только спинором, так что выражения вида $(\eta \mid \dot{\xi})$ лишены смысла и вопрос о поведении скалярного произведения при перестановке множителей не возникает.

То, что мы потребовали здесь антилинейности (а не линейности) относительно коспинорного множителя, очень существенно для ясного понимания роли спиноров и коспиноров в теории представлений.

Нетрудно показать, что для любого базиса $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ пространства $\mathbb{C}^2$ можно построить (причем единственным образом) *дуальный базис* $(\dot{\varepsilon}^1, \dot{\varepsilon}^2)$ пространства $\dot{\mathbb{C}}^2$, связанный с исходным базисом соотношениями

$$(\dot{\varepsilon}^{\dot{\mu}} \mid \varepsilon_\nu) = \delta^{\dot{\mu}}_\nu = \begin{cases} 0 & (\dot{\mu} \neq \nu), \\ 1 & (\dot{\mu} = \nu). \end{cases} \tag{3.8}$$

Произвольный коспинор $\dot{\eta}$ разлагается по дуальному базису:

$$\dot{\eta} = \eta_1\dot{\varepsilon}^1 + \eta_2\dot{\varepsilon}^2 \tag{3.9}$$

(координаты коспиноров по традиции различаются с помощью «пунктированных» индексов). В силу (3.6), (3.9) скалярное произведение коспинора на спинор выражается в координатах по дуальным базисам следующим образом:

$$(\dot{\eta}\,|\,\xi) = \eta_{\dot{1}}\xi^1 + \eta_{\dot{2}}\xi^2 = \delta^{\dot{\mu}}_{\nu}\eta_{\dot{\mu}}\xi^{\nu}. \tag{3.10}$$

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем пользоваться только дуальными базисами.

Основная антисимметрическая форма. Мы внесем теперь в пространства спиноров и коспиноров *метрику*, т. е. зададим на этих пространствах билинейные формы, напоминающие скалярные произведения. Однако в отличие от более привычных случаев, таких, как евклидово пространство или пространство Минковского, эти формы будут *антисимметричны*. Стандартный способ построения билинейной формы состоит в использовании линейного оператора: задав такой оператор C, ищут форму в виде $(C\xi\,|\,\eta)$. В нашем случае, когда ξ, η — спиноры, а скалярное произведение $(\dot{\xi}\,|\,\eta)$ связывает коспинор $\dot{\xi}$ и спинор η, причем антилинейно по отношению к первому и *линейно* по отношению ко второму, $(C\xi\,|\,\eta)$ представляет собой *билинейную* форму от ξ, η лишь в случае, если оператор C переводит спиноры в коспиноры и притом *антилинеен*, т. е.

$$C(\lambda\xi + \mu\eta) = \bar{\lambda}C(\xi) + \bar{\mu}C(\eta). \tag{3.11}$$

Предположим, что оператор C обратим; тогда C^{-1} также является антилинейным оператором и переводит коспиноры в спиноры. Обозначим $C\xi$ через $\dot{\xi}$, т. е. той же буквой с точкой вверху:

$$C\xi = \dot{\xi}, \quad C^{-1}\dot{\xi} = \xi. \tag{3.12}$$

Требование, чтобы форма $(C\xi\,|\,\eta)$ была антисимметрической, влечет за собой $(C\xi\,|\,\xi) = 0$; в самом деле, антисимметрическая форма должна менять знак при перестановке аргументов и, следовательно, равна нулю, когда аргументы совпадают; поэтому форма $(C\xi\,|\,\eta)$

при $\eta=\xi$ обращается в нуль. Обратно, предположим, что оператор C обладает свойством

$$(\mathsf{C}\xi\,|\,\xi)=(\dot{\xi}\,|\,\xi)=0. \tag{3.13}$$

Тогда форма

$$G(\xi,\ \eta)=(\mathsf{C}\xi\,|\,\eta)=(\dot{\xi}\,|\,\eta)$$

антисимметрическая, как видно из тождества

$$G(\xi,\ \eta)+G(\eta,\ \xi)=$$
$$=\frac{1}{2}\{G(\xi+\eta,\ \xi+\eta)-G(\xi-\eta,\ \xi-\eta)\}.$$

Билинейная форма в пространстве коспиноров может быть задана точно так же с помощью оператора C^{-1}; можно искать ее в виде $(\dot{\xi}\,|\,\mathsf{C}^{-1}\dot{\eta})$ или $(\dot{\eta}\,|\,\mathsf{C}^{-1}\dot{\xi})$. Однако такая форма оказывается *антилинейной* по отношению к обоим аргументам $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, поскольку C^{-1} — антилинейный оператор. Положение легко исправить, применив к форме комплексное сопряжение.

Итак, мы предполагаем, что задан обратимый антилинейный оператор C, преобразующий спиноры в коспиноры и удовлетворяющий условию (3.13), и вводим с его помощью билинейные формы

$$\begin{aligned} G(\xi,\ \eta)&=(\mathsf{C}\xi\,|\,\eta)=(\dot{\xi}\,|\,\eta),\\ \dot{G}(\dot{\xi},\ \dot{\eta})&=\overline{(\dot{\xi}\,|\,\mathsf{C}^{-1}\dot{\eta})}=\overline{(\dot{\xi}\,|\,\eta)}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Обе эти формы *антисимметрические*, причем

$$\dot{G}(\dot{\xi},\ \dot{\eta})=\overline{G(\xi,\ \eta)}. \tag{3.15}$$

Пользуясь дуальными базисами, можно задать операторы C, C^{-1} взаимно обратными матрицами:

$$\mathsf{C}\varepsilon_{\mu}=C_{\dot{\nu}\mu}\varepsilon^{\dot{\nu}},\qquad \mathsf{C}^{-1}\varepsilon^{\dot{\mu}}=C^{\nu\dot{\mu}}\varepsilon_{\nu}; \tag{3.16}$$

в координатах, учитывая антилинейность C, C^{-1}, имеем

$$\xi_{\dot{\mu}}=C_{\dot{\mu}\nu}\xi^{\nu},\qquad \xi^{\mu}=C^{\mu\dot{\nu}}\xi_{\dot{\nu}}. \tag{3.17}$$

Тогда билинейные формы (3.14), вычисленные по правилу (3.10), принимают вид

$$G(\xi, \eta) = C_{\nu\mu}\xi^{\mu}\eta^{\nu}, \quad \dot{G}(\dot{\xi}, \dot{\eta}) = \overline{G}^{\dot{\nu}\dot{\mu}}\xi_{\dot{\nu}}\eta_{\dot{\mu}}. \tag{3.18}$$

Из условия антисимметрии вытекает, что $C_{11} = C_{22} = 0$, $C_{12} = -C_{21}$, так что обе формы определяются с точностью до (взаимно обратных) множителей. Нормируем обе формы, положив

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{3.19}$$

тогда имеем

$$G(\xi, \eta) = -\begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^2 \\ \eta^1 & \eta^2 \end{vmatrix}, \quad \dot{G}(\dot{\xi}, \dot{\eta}) = -\begin{vmatrix} \xi_{\dot{1}} & \xi_{\dot{2}} \\ \eta_{\dot{1}} & \eta_{\dot{2}} \end{vmatrix}. \tag{3.20}$$

Принятая нормировка метрических форм (3.19) приводит к простой связи между координатами спинора ξ и коспинора $\dot{\xi} = \mathbf{C}\xi$ (см. (3.17)):

$$\xi_{\dot{1}} = \xi^2, \quad \xi_{\dot{2}} = -\xi^1. \tag{3.21}$$

Введем еще для симметрии обозначений координаты с нижними индексами для спиноров и с верхними — для коспиноров:

$$\begin{aligned} \xi_{\mu} &= G(\xi, e_{\mu}) = C_{\mu\nu}\xi^{\nu}, \\ \xi^{\dot{\mu}} &= \dot{G}(e^{\dot{\mu}}, \dot{\xi}) = C^{\dot{\mu}\dot{\nu}}\xi_{\dot{\nu}}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

где уже принята во внимание действительность матриц C, C^{-1}; ввиду (3.19) это равносильно

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi^2, & \xi^{\dot{1}} &= -\xi_{\dot{2}}, \\ \xi_2 &= -\xi^1, & \xi^{\dot{2}} &= \xi_{\dot{1}}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Ввиду (3.21) отсюда следует

$$\xi_{\dot{1}} = \xi_1, \quad \xi_{\dot{2}} = \xi_2, \quad \xi^{\dot{1}} = \xi^1, \quad \xi^{\dot{2}} = \xi^2. \tag{3.24}$$

Здесь подразумевается, конечно, что «пунктированные» координаты относятся к коспинору $\dot{\xi}$, связанному с ξ соотношением $\dot{\xi} = \mathbf{C}\xi$.

Сопоставляя (3.18) с (3.22), можно записать формы G, $\dot G$ еще в следующем виде:

$$\begin{aligned} G(\xi,\ \eta) &= \xi_\mu \eta^\mu = -\xi^\mu \eta_\mu, \\ \dot G(\dot\xi,\ \dot\eta) &= \xi_{\dot\mu} \eta^{\dot\mu} = -\xi^{\dot\mu} \eta_{\dot\mu}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Заметим, что расположение индексов, по которым производится свертывание, здесь не безразлично (в отличие от случая симметрической метрики).

Группа SL (2). Наиболее общее линейное преобразование спиноров

$$\xi' = u\xi \tag{3.26}$$

задается в выбранном базисе $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$ матрицей (u^μ_ν):

$$u(\varepsilon_\mu) = u^\nu_\mu \varepsilon_\nu \tag{3.27}$$

или, что равносильно,

$$\xi'^\mu = u^\mu_\nu \xi^\nu. \tag{3.28}$$

Отсюда для двух спиноров ξ, η имеем матричное равенство

$$\begin{pmatrix} \xi'^1 & \eta'^1 \\ \xi'^2 & \eta'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1_1 & u^1_2 \\ u^2_1 & u^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 & \eta^1 \\ \xi^2 & \eta^2 \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

Переходя к определителям, получаем

$$G(\xi',\ \eta') = \det |u^\mu_\nu| \cdot G(\xi,\ \eta). \tag{3.30}$$

Следовательно, для того чтобы преобразование u сохраняло метрическую форму G спинорного пространства, необходимо и достаточно условие $\det |u| = 1$.

Матрицы u с определителем, равным единице, называются, как уже было сказано, унимодулярными. Поскольку при умножении матриц их определители умножаются, произведение унимодулярных матриц есть опять унимодулярная матрица; единичная матрица унимодулярна; матрица, обратная унимодулярной, также унимодулярна. Таким образом, все унимодулярные матрицы второго порядка образуют группу, называемую *унимодулярной группой второго порядка*, или *бинарной группой*, и обозначаемую SL (2) [1].

[1]) Special Linear.

Как мы увидим, эта группа теснейшим образом связана с группой Лоренца, но значительно удобнее ее для построения представлений.

Отметим сразу же следующее свойство бинарных матриц:

$$(u^T)^{-1} = CuC^{-1}. \tag{3.31}$$

Это свойство означает, что если «верхние» координаты спинора ξ^μ преобразуются согласно (3.28) с помощью матрицы u, то «нижние» координаты его ξ_μ преобразуются с помощью матрицы $(u^T)^{-1}$. Другое истолкование этой последней матрицы состоит в том, что она задает то же преобразование (3.28) в другом базисе, состоящем из спиноров

$$\begin{gathered} \varepsilon_\mu = \sum_\nu C_{\nu\mu}\varepsilon_\nu = -C^{\nu\mu}\varepsilon_\nu, \\ \varepsilon_1 = -\varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1. \end{gathered} \tag{3.32}$$

Матрицы, задающие одно и то же преобразование в разных базисах, называются *эквивалентными*. Итак, бинарные матрицы u и $(u^T)^{-1}$ эквивалентны.

Сопряженное представление. Действие группы $SL(2)$ в спинорном пространстве $\mathbb{C}^2$, заданное в выбранном базисе формулой (3.28), одновременно служит и определением этой группы, и ее представлением в векторном пространстве $\mathbb{C}^2$, поскольку элементы группы с самого начала задаются как линейные преобразования или, что то же, линейные операторы в $\mathbb{C}^2$ (ср. общее понятие представления, § 2). Такое представление, возникающее из самого способа задания группы, иногда называется «фундаментальным» [1]).

Другое представление группы $SL(2)$ можно построить в дуальном пространстве $\dot{\mathbb{C}}^2$ следующим образом. Поставим в соответствие преобразованию $\xi' = u\,\xi$

[1]) Этот термин не имеет, впрочем, ясного логического смысла, так как одну и ту же группу можно задать различными «матричными» представлениями. Обычно «фундаментальным» считается точное представление наименьшей размерности, или одно из таких представлений (в случае группы $SL(2)$, как мы сейчас увидим, имеется два различных двумерных представления).

пространства $\mathbb{C}^2$ преобразование $\dot{\eta}'=v\dot{\eta}$ пространства $\dot{\mathbb{C}}^2$, связанное с u соотношением

$$v\mathsf{C}=\mathsf{C}u. \tag{3.33}$$

Иначе говоря, $v=\mathsf{C}u\mathsf{C}^{-1}$, откуда

$$v\dot{\eta}=\mathsf{C}u\mathsf{C}^{-1}\dot{\eta}. \tag{3.34}$$

Ясно, что v — линейное преобразование коспиноров, матрица которого, вследствие антилинейности оператора C, имеет вид $C\bar{u}C^{-1}$. В силу (3.31) она равна $\overset{+}{u}{}^{-1}$:

$$v=\overset{+}{u}{}^{-1}, \tag{3.35}$$

где матрица преобразования v, обозначенная той же буквой, относится к дуальному базису, а крест над символом матрицы означает эрмитово сопряжение. Чтобы записать это преобразование в координатах, заметим, что вообще коспиноры преобразуются по правилам, аналогичным (3.27), (3.28):

$$\varepsilon'^{\dot{\mu}}=w^{\dot{\mu}}_{\dot{\nu}}\varepsilon^{\dot{\nu}}, \quad \eta'_{\dot{\mu}}=w^{\dot{\nu}}_{\dot{\mu}}\eta_{\dot{\nu}}; \tag{3.36}$$

однако суммирование производится в этих формулах иначе — для преобразования базисных векторов по *нижнему* индексу, а для преобразования координат по *верхнему*. Мы будем считать стандартным применение индексов в (3.27), (3.28), а в случаях, подобных (3.36), будем считать, что применяется *транспонированная* матрица w^T. Так как надо преобразовать $\dot{\eta}$ с помощью матрицы v, мы должны положить в (3.36) $w=v^T$, и из (3.35) получаем

$$\left.\begin{aligned} v\varepsilon^{\dot{\mu}}&=(\bar{u}^{-1})^{\dot{\mu}}_{\dot{\nu}}\varepsilon^{\dot{\nu}}, && (3.37)\\ \eta'_{\dot{\mu}}&=(\bar{u}^{-1})^{\dot{\nu}}_{\dot{\mu}}\eta_{\dot{\nu}} && (3.38)\end{aligned}\right\}\ \text{(в дуальном базисе).}$$

Введем теперь в коспинорном пространстве $\dot{\mathbb{C}}^2$ вместо базиса $(\varepsilon^{\dot{1}}, \varepsilon^{\dot{2}})$, дуального $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, другой базис $(\tilde{\varepsilon}^{\dot{1}}, \tilde{\varepsilon}^{\dot{2}})$, связанный с дуальным формулами

$$\tilde{\varepsilon}^{\dot{\mu}}=C_{\dot{\nu}\dot{\mu}}\varepsilon^{\dot{\nu}}=-\sum_{\dot{\nu}}C^{\dot{\nu}\dot{\mu}}\varepsilon^{\dot{\nu}}, \tag{3.39}$$

$$\tilde{\varepsilon}^{\dot{1}}=-\varepsilon^{\dot{2}}, \quad \tilde{\varepsilon}^{\dot{2}}=\varepsilon^{\dot{1}}$$

(ср. (3.32)). Назовем этот базис *сопряженным* по отношению к $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ (термин не является общепринятым). Тогда в сопряженном базисе преобразование v задается, как легко проверить, матрицей $C\overset{+}{u}{}^{-1}C^{-1}$. В силу соотношения (3.31), справедливого для всех бинарных матриц, эта матрица равна $\bar{u}$. Учитывая то же соглашение об употреблении индексов, имеем

$$\left.\begin{aligned} v\varepsilon^{\dot\lambda} &= \overset{+}{u}{}^{\dot\mu}_{\dot\nu}\varepsilon^{\dot\nu}, & (3.40)\\ \eta'_{\dot\mu} &= \overset{+}{u}{}^{\dot\nu}_{\dot\mu}\eta_{\dot\nu} & (3.41)\end{aligned}\right\}\ \text{(в сопряженном базисе).}$$

Пользуясь полученным выражением v (3.38), нетрудно проверить следующее соотношение, связывающее v с u: для всех спиноров ξ и коспиноров $\overset{+}{\eta}$

$$(v\overset{+}{\eta}\,|\,u\xi) = (\overset{+}{\eta}\,|\,\xi). \tag{3.42}$$

Обратно, из (3.42) получается (3.33), так что эти формулы равным образом могут служить для определения v. Покажем теперь, что формула (3.33) задает представление группы $SL\,(2)$ в пространстве коспиноров $\overset{+}{\mathbb{C}}{}^2$. В самом деле, если u_1, u_2 — бинарные матрицы и $u_3 = u_1u_2$, то

$$v_3 = \mathrm{C}u_3\mathrm{C}^{-1} = \mathrm{C}u_1u_2\mathrm{C}^{-1} = (\mathrm{C}u_1\mathrm{C}^{-1})\,(\mathrm{C}u_2\mathrm{C}^{-1}) = v_1v_2.$$

Очевидно также, что матрице $u=1$ соответствует $v=1$. Итак, $T_u = v$ есть представление.

Важно отметить, что это представление существенно отлично от «фундаментального» представления (3.28). Чтобы уточнить, какие представления считаются «существенно различными», введем следующее определение.

Представление $\{T_g\}$ группы G в пространстве V и представление $\{T'_g\}$ этой же группы в пространстве V' называются *эквивалентными*, если существует такой обратимый линейный оператор W, отображающий V на V', что

$$T_g{}' = WT_gW^{-1} \text{ для всех } g. \tag{3.43}$$

Это значит, что в подходящих базисах, связанных преобразованием W, оба представления имеют одинаковые матрицы (при всех g). В частности, пространства

V, V' могут совпадать. Так, матрицы $(u^T)^{-1}$, как мы видели, связаны с u эквивалентностью (3.31). Они образуют, как легко видеть, представление группы SL (2). Точно так же для любой группы и любого ее представления матрицами $\{u\}$ можно построить так называемое «контрагредиентное представление» из матриц $(u^T)^{-1}$, которое, однако, в общем случае не эквивалентно исходному. Эквивалентность (3.31) является, таким образом, специальным свойством группы SL (2). С этим специальным свойством и связано принятое выше определение дуальности пространств спиноров и коспиноров. Если бы мы определили дуальность $\mathbb{C}^2$ и $\dot{\mathbb{C}}^2$ с помощью *билинейного* скалярного произведения (а не линейного по второму множителю и антилинейного по первому, как мы это сделали в (3.7)), то получили бы из (3.42) $v=(u^T)^{-1}$, т. е. как раз контрагредиентное представление, не дающее для группы SL (2) ничего нового. Напротив, представление (3.38) не эквивалентно «фундаментальному» представлению $\{u\}$. Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что из (3.43) следует равенство следов $\mathrm{Sp}\,T'_g=\mathrm{Sp}\,T_g$, между тем как $\mathrm{Sp}\,\dot{u}^{-1}$ не для всех бинарных матриц равен $\mathrm{Sp}\,u$.

Группа $SU(2)$. Унимодулярная группа SL (2), связанная, как мы покажем дальше, с группой Лоренца, содержит подгруппу, связанную с группой вращений. Чтобы описать эту подгруппу, введем в спинорном пространстве $\mathbb{C}^2$, наряду с антисимметрической билинейной формой $G(\xi, \eta)$, *эрмитово скалярное произведение* $\langle \xi \mid \eta \rangle$, т. е. скалярное произведение со следующими алгебраическими свойствами:

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad \langle \xi+\eta \mid \zeta\rangle = \langle \xi \mid \zeta\rangle + \langle \eta \mid \zeta\rangle;\\
&(2) \qquad \langle \zeta \mid \xi+\eta\rangle = \langle \zeta \mid \xi\rangle + \langle \zeta \mid \eta\rangle;\\
&(3) \qquad \langle \lambda\xi \mid \eta\rangle = \bar{\lambda}\langle \xi \mid \eta\rangle;\\
&(4) \qquad \langle \xi \mid \lambda\eta\rangle = \lambda\langle \xi \mid \eta\rangle;\\
&(5) \qquad \langle \xi \mid \eta\rangle = \overline{\langle \eta \mid \xi\rangle};\\
&(6) \qquad \langle \xi \mid \xi\rangle > 0 \text{ при } \xi \neq 0.
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

Таким образом, произведение $\langle \mid \rangle$ *линейно по второму множителю и антилинейно по первому*, а также *положительно определенно*, т. е. скалярный квадрат каждого ненулевого спинора положителен. Благодаря последнему свойству можно ввести для спиноров норму, аналогичную длине вектора:

$$\|\xi\| = \sqrt{(\xi, \xi)}. \tag{3.45}$$

В пространстве коспиноров $\dot{\mathbb{C}}^2$ эрмитово скалярное произведение может быть получено из предыдущего с помощью оператора C: достаточно положить

$$\langle \dot{\xi} \mid \dot{\eta} \rangle = \overline{\langle \xi \mid \eta \rangle}, \tag{3.46}$$

где $\xi = \mathsf{C}^{-1}\dot{\xi}$, $\eta = \mathsf{C}^{-1}\dot{\eta}$.

Комплексное сопряжение в правой части обеспечивает те же алгебраические свойства (3.44); например, для комплексного множителя λ, в силу антилинейности C^{-1}, имеем

$$\langle \lambda\dot{\xi} \mid \dot{\eta} \rangle = \overline{\langle \mathsf{C}^{-1}(\lambda\dot{\xi}) \mid \mathsf{C}^{-1}\dot{\eta} \rangle} =$$
$$= \overline{\langle \bar{\lambda}\mathsf{C}^{-1}\dot{\xi} \mid \mathsf{C}^{-1}\dot{\eta} \rangle} = \lambda\, \overline{\langle \mathsf{C}^{-1}\dot{\xi} \mid \mathsf{C}^{-1}\dot{\eta} \rangle} = \bar{\lambda} \langle \dot{\xi} \mid \dot{\eta} \rangle.$$

Эрмитово скалярное произведение является, конечно, «новой» алгебраической структурой, вводимой на пространствах спиноров и коспиноров; оно не выражается через «старые» структуры $(\mid)$, C. Преобразования $SL(2)$, сохраняющие билинейную форму G (см. (3.30)), вообще говоря, не сохраняют скалярного произведения $\langle \mid \rangle$.

Выделим теперь те преобразования u из $SL(2)$, которые сохраняют это произведение:

$$\langle u\xi \mid u\eta \rangle = \langle \xi \mid \eta \rangle. \tag{3.47}$$

Легко видеть, что такие преобразования образуют группу, являющуюся по построению подгруппой $SL(2)$; эта группа называется *двумерной специальной унитарной группой* и обозначается через $SU(2)$ [1]). Заметим, что эта же группа является подгруппой *унитарной* группы $U(2)$, состоящей из всех (а не только унимоду-

[1]) Special Unitary.

лярных) линейных преобразований, сохраняющих произведение $\langle\ |\ \rangle$.

Напомним, что базис спинорного пространства $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ до сих пор выбирался совершенно произвольно. Для более удобного описания унитарных преобразований этот базис можно специализировать, взяв его *ортонормированным*:

$$\langle\varepsilon_1 | \varepsilon_1\rangle = \langle\varepsilon_2 | \varepsilon_2\rangle = 1, \quad \langle\varepsilon_1 | \varepsilon_2\rangle = \langle\varepsilon_2 | \varepsilon_1\rangle = 0. \tag{3.48}$$

Нормировка билинейной формы G (см. (3.19)) должна теперь относиться к *такому* базису, если приходится рассматривать $G(\xi, \eta)$ и $\langle\xi | \eta\rangle$ одновременно. Тогда

$$\begin{gathered} G(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = G(\varepsilon_2, \varepsilon_2) = 0, \\ G(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -G(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = -1. \end{gathered} \tag{3.49}$$

Разлагая ξ и η по базису, $\xi = \xi^\mu\varepsilon_\mu$, $\eta = \eta^\nu\varepsilon_\nu$, получаем координатное выражение скалярного произведения

$$\langle\xi | \eta\rangle = \xi^1\eta^1 + \xi^2\eta^2. \tag{3.50}$$

Базис, дуальный ортонормированному, также оказывается ортонормированным; в самом деле, в силу (3.16) $\mathrm{C}^{-1}\varepsilon^{\dot 1} = \varepsilon_2$, $\mathrm{C}^{-1}\varepsilon^{\dot 2} = -\varepsilon_1$, и из (3.46) следует

$$\begin{gathered} \langle\varepsilon^{\dot 1} | \varepsilon^{\dot 1}\rangle = \overline{\langle\varepsilon_2 | \varepsilon_2\rangle} = 1, \quad \langle\varepsilon^{\dot 2} | \varepsilon^{\dot 2}\rangle = \overline{\langle-\varepsilon_1 | -\varepsilon_1\rangle} = 1, \\ \langle\varepsilon^{\dot 1} | \varepsilon^{\dot 2}\rangle = \overline{\langle\varepsilon_2 | -\varepsilon_1\rangle} = 0, \quad \langle\dot\xi | \dot\eta\rangle = \xi_{\dot 1}\eta_{\dot 1} + \xi_{\dot 2}\eta_{\dot 2}. \end{gathered} \tag{3.51}$$

Условия унитарности преобразования u особенно просто записываются в ортонормированном базисе; действительно,

$$\langle u\varepsilon_\mu | u\varepsilon_\nu\rangle = \langle u^\varkappa_\mu\varepsilon_\varkappa | u^\lambda_\nu\varepsilon_\lambda\rangle = \bar u^\varkappa_\mu u^\lambda_\nu\delta_{\varkappa\lambda} = \bar u^1_\mu u^1_\nu + \bar u^2_\mu u^2_\nu$$

должно быть равно $\langle\varepsilon_\mu | \varepsilon_\nu\rangle$, т. е. $\delta_{\mu\nu}$:

$$\bar u^1_\mu u^1_\nu + \bar u^2_\mu u^2_\nu = \delta_{\mu\nu}. \tag{3.52}$$

Эти условия аналогичны условиям ортогональности матрицы; их можно истолковать следующим образом. Если считать, что столбцы матрицы (u^1_1, u^2_1), (u^1_2, u^2_2) задают координаты двух спиноров, то (3.52) означает, что эти спиноры составляют ортонормированную систему.

Вводя транспонированную матрицу u^T, можно переписать (3.52) в виде

$$\bar{u}^T u = 1, \quad u^{-1} = \bar{u}^T = \hat{u}. \tag{3.53}$$

Отсюда видно, что матрица u^T унитарна вместе с u:

$$u^T = (\bar{u})^{-1}, \quad (u^T)^{-1} = \bar{u}.$$

Поэтому условия (3.52) для столбцов матрицы равносильны аналогичным условиям для строк.

Из (3.53) видно, что $\det|u|$ по модулю равен 1, так как $\det|u^T| = \det|u|$, $\det|\bar{u}| = \overline{\det|u|}$:

$$|\det|u|| = 1. \tag{3.54}$$

Таким образом, специальная унитарная группа $SU(2)$ выделяется из унитарной группы $U(2)$ требованием, чтобы $\det|u|$ был в точности (а не только по модулю) равен единице.

Заметим теперь, что для унитарной матрицы u матрица сопряженного представления $v = \hat{u}^{-1}$ совпадает с u. Это обстоятельство имеет важное значение при построении представлений группы $SU(2)$. Пусть вообще задано представление $\{T_g\}$ группы G в векторном пространстве V, и пусть группа G содержит подгруппу H. Если рассматривать лишь те операторы T_h, которые соответствуют в данном представлении элементам h подгруппы H, то получается представление подгруппы H в том же пространстве V; $\{T_h\}$ называется *сужением* или *редукцией* представления $\{T_g\}$ на подгруппу H. Сужение представлений $\{u\}$, $\{v\}$ с группы $SL(2)$ на ее подгруппу $SU(2)$ приводит, как мы видим, к эквивалентным представлениям, поскольку в дуальных базисах эти представления имеют одинаковые матрицы.

Связность групп $SU(2)$ и $SL(2)$. В отличие от группы вращений $O(3)$ и полной группы Лоренца L, каждая из групп $SU(2)$, $SL(2)$ связна, т. е. любые два элемента группы могут быть переведены друг в друга непрерывным изменением в пределах той же группы. Начнем с группы $SL(2)$, для которой связность доказывается проще. Пусть u — унимодулярная матрица:

$$u = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что непрерывным изменением элементов можно превратить u в единичную матрицу. Пусть сначала $u_1^1 u_2^2 \neq 0$. Положим

$$u_{\vartheta,\tau} = \begin{pmatrix} \vartheta u_1^1 & \tau u_2^1 \\ \tau u_1^2 & \vartheta u_2^2 \end{pmatrix},$$

где ϑ, τ — комплексные параметры. Условие унимодулярности $u_{\vartheta,\tau}$ приводит к равенству

$$\vartheta^2 u_1^1 u_2^2 - \tau^2 u_2^1 u_1^2 = 1,$$

откуда можно выразить ϑ через τ: $\vartheta = \sqrt{(1 + \tau^2 u_2^1 u_1^2)/u_1^1 u_2^2}$. При $\tau = 1$ подкоренное выражение не обращается в нуль, так как $\det |u| = 1$ и $u_1^1 u_2^2 \neq 0$. Непрерывным изменением в комплексной плоскости можно перевести $\tau = 1$ в $\tau = 0$ таким образом, чтобы подкоренное выражение ни разу не обратилось в нуль. Тогда корень можно определить как однозначную непрерывную функцию $\vartheta(\tau)$, чем задается непрерывное изменение унимодулярной матрицы $u_{\vartheta,\tau}$. При $\tau = 0$ получаем диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha\beta = 1.$$

Заменим здесь опять α на $\tau\alpha$, β на $(1/\tau)\beta$ и будем менять комплексный параметр τ, не проходя через нуль, от значения $\tau = 1$ до $\tau = 1/\alpha$; это и приводит к единичной матрице. Если $u_1^1 u_2^2 = 0$, то можно совершенно аналогично превратить u в матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

а затем уже эту последнюю в единичную матрицу.

В случае группы $SU(2)$ надо в процессе непрерывного изменения элементов матрицы u следить за соблюдением не только унимодулярности, но и унитарности матрицы. Мы предоставляем читателю провести соответствующие операции.

Односвязность групп $SU(2)$ и $SL(2)$. Другое важное свойство этих групп составляет их *односвяз-*

ность. Чтобы определить это понятие, назовем замкнутым путем в группе G семейство элементов $g(\vartheta)$, непрерывно зависящих от ϑ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant a)$, такое, что $g(0)=g(a)$. Конечно, здесь предполагается, что для элементов G введено понятие предельного перехода; это всегда можно сделать для групп, состоящих из матриц. Будем далее говорить, что замкнутый путь $g(\vartheta)$ непрерывно деформируется, если в G задано семейство элементов $g(\vartheta, \tau)$ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant a,\ \ 0 \leqslant \tau \leqslant b)$, непрерывно зависящих от параметров ϑ и τ, такое, что при любом фиксированном τ из семейства получается замкнутый путь $g_\tau(\vartheta)$, т. е. $g(0, \tau)=g(a, \tau)$. Замкнутый путь $g_0(\vartheta)$ называется начальным, а $g_b(\vartheta)$ конечным замкнутым путем деформации. Если $g_b(\vartheta)$ есть одна и та же точка при всех ϑ, то замкнутый путь $g_b(\vartheta)$ называется точечным, а деформация $g(\vartheta, \tau)$ — деформацией замкнутого пути $g_0(\vartheta)$ в точку. Наконец, если любой замкнутый путь группы G может быть деформирован в точку, группа называется *односвязной*.

Группа вращений $SO(3)$ не односвязна; в самом деле, вращения вокруг одной и той же оси на различные углы ϑ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi)$ образуют замкнутый путь, поскольку $g(2\pi)=g(0)$, и можно показать, что этот путь нельзя деформировать в точку в группе $SO(3)$. Хотя доказательство этого факта не совсем просто, его наглядный смысл нетрудно себе уяснить. Точно так же не односвязна и группа $L_+^\uparrow$.

Напротив, *каждая из групп $SU(2)$, $SL(2)$ односвязна*. Доказательство выходит за рамки этой книги; заметим только, что односвязность обеих групп как раз и обеспечивает *однозначность* их представлений и является, тем самым, важным преимуществом этих групп по сравнению с группами $SO(3)$ и $L_+^\uparrow$, которые они в известном смысле заменяют.

§ 4. Спин-тензоры

Определения. Над каждым векторным пространством V, действительным или комплексным, можно построить тензоры любой валентности (ранга) посредством формального умножения векторов этого пространства и ковекторов — векторов дуального пространства.

Случай, когда исходное пространство V — действительное, достаточно известен; например, в физике имеют важное значение тензоры над трехмерным евклидовым пространством $\mathbb{R}^3$ или пространством Минковского $\mathscr{M}$.

Случай комплексного пространства V отличается некоторыми особенностями, которые будут рассмотрены ниже. При этом мы ограничимся тензорами над спинорным пространством $\mathbb{C}^2$ [1]).

Возьмем два экземпляра пространства спиноров $\overset{(1)}{\mathbb{C}^2}$, $\overset{(2)}{\mathbb{C}^2}$, считая спиноры первого из них объектами, отличными от спиноров второго. Однако выражение «два экземпляра одного и того же пространства» предполагает, что между спинорами из $\overset{(1)}{\mathbb{C}^2}$ и $\overset{(2)}{\mathbb{C}^2}$ раз навсегда установлено взаимно однозначное соответствие $\overset{(2)}{\xi}=f(\overset{(1)}{\xi})$, сохраняющее операции сложения и умножения на числа (т. е. $f(\overset{(1)}{\xi'}+\overset{(1)}{\xi''})=$ $=f(\overset{(1)}{\xi'})+f(\overset{(1)}{\xi''})$, $f(\lambda\overset{(1)}{\xi})=\lambda f(\overset{(1)}{\xi})$). Такое соответствие называется *изоморфизмом* векторных пространств. Мы будем для упрощения речи говорить: «спинор $\overset{(1)}{\xi}$ пространства $\overset{(2)}{\mathbb{C}^2}$» вместо «спинор $f(\overset{(1)}{\xi})$».

Построим всевозможные «формальные произведения» вида

$$S=\overset{(1)}{\xi}\otimes\overset{(2)}{\xi}, \tag{4.1}$$

где $\overset{(k)}{\xi}$ — спинор из $\overset{(k)}{\mathbb{C}}$, $k=1, 2$. Здесь $\otimes$ (читается: «тензор») — просто разделительный знак между двумя спинорами из различных пространств, формальные свойства которого, как мы увидим дальше, напоминают знак умножения. «Множители» $\overset{(1)}{\xi}$, $\overset{(2)}{\xi}$ выбираются независимо из соответствующих пространств $\overset{(1)}{\mathbb{C}}$, $\overset{(2)}{\mathbb{C}}$.

---

[1]) Более общее изложение тензорной алгебры над комплексными пространствами можно найти, например, в [14].

Подобно тому, как один спинор ξ порождает линейную функцию $\xi(\dot\eta)$ от коспинора $\dot\eta$ по правилу

$$\xi(\dot\eta) = \overline{(\dot\eta \mid \xi)}$$

(где знак сопряжения нужен для того, чтобы получить линейную, а не антилинейную функцию), формальное произведение S двух спиноров порождает билинейную функцию от двух коспиноров $\underset{(1)}{\dot\eta}$, $\underset{(2)}{\dot\eta}$ по правилу

$$S(\underset{(1)}{\dot\eta}, \underset{(2)}{\dot\eta}) = \overline{(\underset{(1)}{\dot\eta} \mid \overset{(1)}{\xi}) \cdot (\underset{(2)}{\dot\eta} \mid \overset{(2)}{\xi})}, \tag{4.2}$$

т. е. функцию, линейную относительно каждого из аргументов $\underset{(1)}{\dot\eta}$, $\underset{(2)}{\dot\eta}$ при закрепленном втором. Из «мономов» вида (4.1) можно составить «формальные полиномы» вида

$$S = \overset{(1)}{\xi_1} \otimes \overset{(2)}{\xi_1} + \overset{(1)}{\xi_2} \otimes \overset{(2)}{\xi_2} + \ldots + \overset{(1)}{\xi_n} \otimes \overset{(2)}{\xi_n} \tag{4.3}$$

с любым числом слагаемых n (порядок слагаемых безразличен). Каждый такой полином задает билинейную функцию от коспиноров $\underset{(1)}{\dot\eta}$, $\underset{(2)}{\dot\eta}$, равную сумме функций (4.2), порождаемых его слагаемыми «мономами»:

$$S(\underset{(1)}{\dot\eta}, \underset{(2)}{\dot\eta}) = \overline{\sum_{j=1}^{n} (\underset{(1)}{\dot\eta} \mid \overset{(1)}{\xi_j}) \cdot (\underset{(2)}{\dot\eta} \mid \overset{(2)}{\xi_j})}. \tag{4.4}$$

Можно показать, что наиболее общая билинейная функция от пары коспиноров может быть представлена в виде (4.4), если выбрать надлежащим образом полином S. Но, конечно, такое представление не однозначно: различные полиномы S, $\tilde S$ могут задавать одну и ту же функцию. Рассмотрим, например, «элементарные преобразования» следующих типов:

(1) если в полиноме S встречается моном вида $(\overset{(1)}{\xi'} + \overset{(1)}{\xi''}) \otimes \overset{(2)}{\xi}$, он заменяется суммой двух мономов $\overset{(1)}{\xi'} \otimes \overset{(2)}{\xi} + \overset{(1)}{\xi''} \otimes \overset{(2)}{\xi}$, или, обратно, такая сумма, входящая в S, заменяется предыдущим мономом;

(2) если в полиноме S встречается моном вида $(\lambda\overset{(1)}{\xi})\otimes\overset{(2)}{\xi}$, он заменяется мономом $\overset{(1)}{\xi}\otimes\lambda\overset{(2)}{\xi}$, или, обратно, такой моном, входящий в S, заменяется предыдущим (λ — комплексное число).

Полиномы S, $\tilde{S}$, полученные друг из друга с помощью элементарных преобразований, очевидно, определяют одну и ту же билинейную функцию S. Обратно, можно доказать, что если S и $\tilde{S}$ определяют одну и ту же билинейную функцию от пары коспиноров, то они могут быть превращены друг в друга некоторым (конечным) числом элементарных преобразований. Мы определим теперь спин-тензор (пока частного вида) как *билинейную функцию*, а полиномы S будем рассматривать как *способы задания* такой функции:

Спин-тензором валентности (2, 0) *называется билинейная функция от двух коспиноров* $\underset{(1)}{\dot\eta}$, $\underset{(2)}{\eta}$.

Совершенно аналогично полиномы от коспиноров $\underset{(1)}{\dot\eta}$, $\underset{(2)}{\dot\eta}$, взятых соответственно из двух экземпляров коспинорного пространства $\underset{(1)}{\dot{\mathbb{C}}^2}$, $\underset{(2)}{\dot{\mathbb{C}}^2}$, имеют вид

$$S=\underset{(1)}{\dot\eta_1}\otimes\underset{(2)}{\dot\eta_1}+\ldots+\underset{(1)}{\dot\eta_n}\otimes\underset{(2)}{\dot\eta_n}\tag{4.5}$$

и задают билинейные функции от двух спиноров

$$S(\overset{(1)}{\xi},\overset{(2)}{\xi})=\sum_{j=1}^{n}(\underset{(1)}{\dot\eta_j}\,|\,\overset{(1)}{\xi})\cdot(\underset{(2)}{\dot\eta_j}\,|\,\overset{(2)}{\xi}).\tag{4.6}$$

Такие функции называются *спин-тензорами валентности* (0, 2).

Наконец, полиномы «смешанного» вида

$$S=\xi_1\otimes\dot\eta_1+\ldots+\xi_n\otimes\dot\eta_n,\tag{4.7}$$

составленные из спиноров ξ_j пространства $\mathbb{C}^2$ и коспиноров $\dot\eta_j$ пространства $\dot{\mathbb{C}}^2$, задают билинейные функции от спинора ξ и коспинора $\dot\eta$ по правилу

$$S(\xi,\,\dot\eta)=\sum_{j=1}^{n}\overline{(\dot\eta\,|\,\xi_j)}\cdot(\dot\eta_j\,|\,\xi);\tag{4.8}$$

такие функции называются *спин-тензорами валентности* (1, 1).

С логической точки зрения спин-тензор есть билинейная функция или, если угодно, класс эквивалентных полиномов, задающих одну и ту же функцию. Однако на практике удобнее рассматривать спин-тензор как полином, алгебраически построенный из спиноров и коспиноров и определенный с точностью до элементарных преобразований. Такая точка зрения позволяет наиболее естественно ввести «спин-тензорные представления»: если заданы законы преобразования спиноров и коспиноров, то составленный из них моном преобразуется «как их произведение» (см. ниже, (4.16)), а тем самым, ввиду линейности операторов представления, задается и закон преобразования полиномов. При этом легко убедиться, что эквивалентные полиномы преобразуются в эквивалентные.

Чтобы получить координатное представление спин-тензоров, выберем в пространствах $\mathbb{C}^2$, $\dot{\mathbb{C}}^2$ дуальные базисы $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $(\varepsilon^{\dot 1}, \varepsilon^{\dot 2})$ и возьмем в каждом пространстве $\overset{(k)}{\mathbb{C}^2}$, $\overset{(k)}{\dot{\mathbb{C}}^{2}}$ по экземпляру соответствующего базиса $(\overset{(k)}{\varepsilon_1}, \overset{(k)}{\varepsilon_2})$, $(\overset{(k)}{\varepsilon^{\dot 1}}, \overset{(k)}{\varepsilon^{\dot 2}})$. Разложим каждый спинор и коспинор по базису содержащего его пространства; тогда с помощью элементарных преобразований каждый спин-тензор описанных выше типов представляется соответственно в виде

$$
\begin{aligned}
S &= S^{11}\overset{(1)}{\varepsilon_1}\otimes\overset{(2)}{\varepsilon_1} + S^{12}\overset{(1)}{\varepsilon_1}\otimes\overset{(2)}{\varepsilon_2} + S^{21}\overset{(1)}{\varepsilon_2}\otimes\overset{(2)}{\varepsilon_1} + S^{22}\overset{(1)}{\varepsilon_2}\otimes\overset{(2)}{\varepsilon_2},\\
S &= S_{\dot 1\dot 1}\underset{(1)}{\varepsilon^{\dot 1}}\otimes\underset{(2)}{\varepsilon^{\dot 1}} + S_{\dot 1\dot 2}\underset{(1)}{\varepsilon^{\dot 1}}\otimes\underset{(2)}{\varepsilon^{\dot 2}} + S_{\dot 2\dot 1}\underset{(1)}{\varepsilon^{\dot 2}}\otimes\underset{(2)}{\varepsilon^{\dot 1}} + S_{\dot 2\dot 2}\underset{(1)}{\varepsilon^{\dot 2}}\otimes\underset{(2)}{\varepsilon^{\dot 2}}, \qquad (4.9)\\
S &= S^{1}_{\dot 1}\varepsilon_1\otimes\varepsilon^{\dot 1} + S^{1}_{\dot 2}\varepsilon_1\otimes\varepsilon^{\dot 2} + S^{2}_{\dot 1}\varepsilon_2\otimes\varepsilon^{\dot 1} + S^{2}_{\dot 2}\varepsilon_2\otimes\varepsilon^{\dot 2}.
\end{aligned}
$$

Можно показать, что разложения (4.9) однозначны. Обратно, любой набор комплексных чисел $S^{\mu\nu}$, $S_{\dot\mu\dot\nu}$, $S^{\mu}_{\dot\nu}$ определяет соответствующий спин-тензор S по формулам (4.9); числа эти называются *координатами* или *компонентами* S относительно выбранных дуальных базисов.

Наиболее общие спин-тензоры валентности (r, s) $(r, s = 0, 1, 2, \ldots)$ определяются по той же схеме. Рассматриваются формальные полиномы S от спиноров $\overset{(k)}{\xi}_j$, принадлежащих r экземплярам спинорного пространства $\overset{(k)}{\mathbb{C}}{}^2$ $(k=1,\ 2,\ \dots,\ r)$, и от коспиноров $\underset{(l)}{\dot\eta}_j$, принадлежащих s экземплярам коспинорного пространства $\underset{(l)}{\dot{\mathbb{C}}}{}^2$ $(l=1,\ 2,\ \dots,\ s)$:

$$S=\sum_{j=1}^{n}\left(\bigotimes_{k=1}^{r}\overset{(k)}{\xi}_j\right)\left(\bigotimes_{l=1}^{s}\underset{(l)}{\dot\eta}_j\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\overset{(1)}{\xi}_j\otimes\dots\otimes\overset{(r)}{\xi}_j\otimes\underset{(1)}{\dot\eta}_j\otimes\dots\otimes\underset{(s)}{\dot\eta}_j. \tag{4.10}$$

Каждый такой полином задает полилинейную функцию от r коспиноров и s спиноров

$$S(\overset{(1)}{\xi},\ \dots,\ \overset{(s)}{\xi},\ \underset{(1)}{\dot\eta},\ \dots,\ \underset{(r)}{\dot\eta})=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{r}\overline{(\underset{(k)}{\dot\eta}\,|\,\overset{(k)}{\xi}_j)}\right)\cdot\left(\prod_{l=1}^{s}(\underset{(l)}{\dot\eta}_j\,|\,\overset{(l)}{\xi})\right), \tag{4.11}$$

т. е. функцию, линейную относительно каждого аргумента при закрепленных остальных. Такая функция называется *спин-тензором валентности* $(r,\ s)$, а задающий ее полином определен с точностью до элементарных преобразований. Координатное представление спин-тензора валентности $(r,\ s)$ имеет вид

$$S=S^{\nu_1\dots\nu_r}_{\dot\mu_1\dots\dot\mu_s}\,\overset{(1)}{\varepsilon}_{\nu_1}\otimes\dots\otimes\overset{(r)}{\varepsilon}_{\nu_r}\otimes\underset{(1)}{\varepsilon}{}^{\dot\mu_1}\otimes\dots\otimes\underset{(s)}{\varepsilon}{}^{\dot\mu_s}, \tag{4.12}$$

где каждый индекс $\dot\mu_\rho$, ν_σ пробегает, независимо от остальных, значения 1, 2.

Для спин-тензоров данной валентности $(r,\ s)$ можно определить сложение и умножение на комплексные числа; для этого надо сложить соответствующие полилинейные функции или умножить такую функцию на число. Для полиномов (4.10), изображающих спин-тензоры, сложение означает, что две суммы этого вида надо соединить знаком плюс; умножение же на комплексное число λ означает, что в каждом из мономов (4.10) надо умножить на λ один из сомножителей (все равно который, ввиду второго правила элементарного преобразования). В силу этих определений все спин-тензоры валентности (r, s) образуют комплексное векторное пространство, которое мы обозначим через S^r_s.

Базис этого пространства составляют спин-тензоры

$$\varepsilon^{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_s}_{\nu_1\ldots\nu_r} = \overset{(1)}{\varepsilon}_{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \overset{(r)}{\varepsilon}_{\nu_r} \otimes \underset{(1)}{\varepsilon^{\dot\mu_1}} \otimes \ldots \otimes \underset{(s)}{\varepsilon^{\dot\mu_s}}, \qquad (4.13)$$

через которые, согласно (4.12), выражаются все спин-тензоры S^r_s; линейная независимость их следует из того факта, что на каждой системе коспиноров и спиноров $\varepsilon^{\dot\kappa_1}, \ldots, \varepsilon^{\dot\kappa_r}$, $\varepsilon_{\lambda_1}, \ldots, \varepsilon_{\lambda_s}$ ненулевое значение принимает лишь одна из полилинейных функций, заданных спин-тензорами (4.13): из

$$a^{\nu_1\ldots\nu_r}_{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_s}\varepsilon^{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_s}_{\nu_1\ldots\nu_r} = 0$$

следует

$$a^{\nu_1\ldots\nu_r}_{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_s}\varepsilon^{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_s}_{\nu_1\ldots\nu_r}(\varepsilon^{\dot\kappa_1}, \ldots, \varepsilon^{\dot\kappa_r}, \varepsilon_{\lambda_1}, \ldots, \varepsilon_{\lambda_s}) =$$
$$= a^{\nu_1\ldots\nu_r}_{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_s}\delta^{\dot\kappa_1}_{\nu_1}\ldots\delta^{\dot\kappa_r}_{\nu_r}\delta^{\dot\mu_1}_{\lambda_1}\ldots\delta^{\dot\mu_s}_{\lambda_s} = 0,$$

и тем самым все коэффициенты $a^{\nu_1\ldots\nu_r}_{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_s} = 0$.

Поэтому размерность пространства S^r_s равна числу наборов

$$\begin{pmatrix}\dot\mu_1 \ldots \dot\mu_s \\ \nu_1 \ldots \nu_r\end{pmatrix},$$

в которых все индексы независимо принимают значения 1, 2, т. е.

$$\dim S^r_s = 2^{r+s}.$$

«Метрическая форма» $G(\xi, \eta)$ позволяет определить операции «подъема и опускания индексов», которые достаточно разъяснить в случае спин-тензора S валентности (1, 1), имеющего вид монома $\xi \otimes \dot\eta$:

$$S^{\nu\dot\mu} = (\varepsilon^\nu \mid \xi)\,\dot G(\varepsilon^{\dot\mu}, \dot\eta), \qquad S_{\nu\dot\mu} = G(\xi, \varepsilon_\nu)(\dot\eta \mid \varepsilon_{\dot\mu}), \qquad (4.14)$$

откуда

$$S^{\nu\dot\mu} = C^{\dot\mu\dot\lambda}S^\nu_{\dot\lambda}, \qquad S_{\nu\dot\mu} = C_{\nu\lambda}S^\lambda_{\dot\mu}. \qquad (4.15)$$

Следует заметить, что при этих операциях «непунктированные» индексы переходят опять в «непунктированные», а «пунктированные» — опять в «пунктированные», так что валентность спин-тензора по-прежнему может быть установлена по числу тех и других.

Спин-тензорные представления группы SL (2). Выражение спин-тензора (4.10) через спиноры и коспиноры позволяет наиболее естественным образом построить представления группы SL (2) в каждом из спин-тензорных пространств S^r_s. Поскольку каждый полином (4.10) является суммой мономов, а операторы представления должны быть, по определению, линейными, достаточно задать действие этих операторов на мономы. Для этого применим к каждому множителю-спинору ξ преобразование «фундаментального» представления u, а к каждому множителю-коспинору $\dot{\eta}$ преобразование сопряженного представления v; итак, мы ставим в соответствие каждой бинарной матрице u оператор $T_u = U$, действующий на пространстве S^r_s всех спин-тензоров валентности (r, s) по правилу

$$U(\overset{(1)}{\xi} \otimes \ldots \otimes \overset{(r)}{\xi} \otimes \underset{(1)}{\dot{\eta}} \otimes \ldots \otimes \underset{(s)}{\dot{\eta}}) = u\overset{(1)}{\xi} \otimes \ldots \otimes u\overset{(r)}{\xi} \otimes v\underset{(1)}{\dot{\eta}} \otimes \ldots \otimes v\underset{(s)}{\dot{\eta}}. \qquad (4.16)$$

Определение операторов U, содержащееся в (4.16), *инвариантно*, т. е. не зависит от выбора базисов в пространствах спиноров и коспиноров. Нетрудно, далее, убедиться, что при элементарных преобразованиях полиномов S их образы US испытывают такие же элементарные преобразования. Поэтому формула (4.16) действительно задает преобразование спин-тензоров, зависящее лишь от матрицы u, но не от частного представления спин-тензора в виде полинома (4.10).

Пользуясь дуальными базисами $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $(\varepsilon^{\dot{1}}, \varepsilon^{\dot{2}})$, запишем преобразование спиноров в виде (3.27)

$$u\varepsilon_\mu = u^\nu_\mu \varepsilon_\nu, \qquad (4.17)$$

а преобразование коспиноров в виде (3.37)

$$v\varepsilon^{\dot{\mu}} = (\bar{u}^{-1})^{\dot{\mu}}_{\dot{\nu}} \varepsilon^{\dot{\nu}}. \qquad (4.18)$$

Применив оператор U (4.16) к обеим частям разложения (4.12) и выполнив элементарные преобразования, получаем координатное выражение для U в виде $US=S'$, где

$$S'^{\nu_1 \ldots \nu_r}_{\dot{\mu}_1 \ldots \dot{\mu}_s} = u^{\nu_1}_{\varkappa_1} \ldots u^{\nu_r}_{\varkappa_r} (\bar{u}^{-1})^{\dot{\lambda}_1}_{\dot{\mu}_1} \ldots (\bar{u}^{-1})^{\dot{\lambda}_s}_{\dot{\mu}_s} S^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_r}_{\dot{\lambda}_1 \ldots \dot{\lambda}_s}. \tag{4.19}$$

Если вместо дуального базиса взять для коспиноров сопряженный базис $\bar{\varepsilon}^{\dot{1}}$, $\bar{\varepsilon}^{\dot{2}}$, то вместо (3.28) придется использовать правило (3.41), что приводит к выражению

$$S'^{\nu_1 \ldots \nu_r}_{\dot{\mu}_1 \ldots \dot{\mu}_s} = u^{\nu_1}_{\varkappa_1} \ldots u^{\nu_r}_{\varkappa_r} \overset{+}{u}{}^{\dot{\lambda}_1}_{\dot{\mu}_1} \ldots \overset{+}{u}{}^{\dot{\lambda}_s}_{\dot{\mu}_s} S^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_r}_{\dot{\lambda}_1 \ldots \dot{\lambda}_s}. \tag{4.20}$$

Часто применяется другая запись оператора U — в компонентах с поднятыми или опущенными индексами. Подняв все верхние индексы по правилу (4.15), имеем

$$S^{\nu_1 \ldots \nu_r \dot{\mu}_1 \ldots \dot{\mu}_s} = C^{\dot{\mu}_1 \dot{\varkappa}_1} \ldots C^{\dot{\mu}_s \dot{\varkappa}_s} S^{\nu_1 \ldots \nu_r}_{\dot{\varkappa}_1 \ldots \dot{\varkappa}_s}. \tag{4.21}$$

Точно так же получаются компоненты с поднятыми индексами спин-тензора $S'=US$, которые можно выразить через компоненты того же типа спин-тензора S. Как показывает подсчет, использующий (3.31), это приводит к закону преобразования

$$S'^{\nu_1 \ldots \nu_r \dot{\mu}_1 \ldots \dot{\mu}_s} = u^{\nu_1}_{\varkappa_1} \ldots u^{\nu_r}_{\varkappa_r} \bar{u}^{\dot{\mu}_1}_{\dot{\lambda}_1} \ldots \bar{u}^{\dot{\mu}_1}_{\dot{\lambda}_s} S^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_r \dot{\lambda}_1 \ldots \dot{\lambda}_s}. \tag{4.22}$$

Аналогичное выражение получается для компонент с опущенными индексами.

Таким образом, каждой бинарной матрице u поставлен в соответствие оператор $T_u=U$. Бинарной матрице u_1u_2 соответствует, как легко видеть, произведение операторов U_1, U_2 в том же порядке, т. е. $T_{u_1u_2}=T_{u_1}T_{u_2}$; единичной матрице $u=1$ соответствует единичный оператор. Следовательно, *мы построили представление группы SL (2) в пространстве S^r_s*; представления этого рода называются *спин-тензорными*.

Однако полученные таким образом представления довольно сложно устроены. Чтобы выяснить строение представлений, введем следующие общие понятия. Пусть дано представление $\{T_g\}$ группы G в векторном пространстве V. Может случиться, что V содержит подпространство V_1 (не совпадающее с V и не сводящееся к нулевому вектору), обладающее следующим свойством: если x_1 — вектор из V_1, то для всех g из группы G векторы $T_g x_1$ также лежат в V_1. Такое подпространство V_1 называется *инвариантным* по отношению к представлению $\{T_g\}$, а само представление в таком случае называется *приводимым*. Для достаточно просто устроенных групп (к числу которых принадлежат, например, группы вращений, группа Лоренца, группы $SL(2)$ и $SU(2)$) можно построить «дополнительное» к V_1 подпространство V_2, также инвариантное относительно $\{T_g\}$ и такое, что каждый вектор x пространства V однозначно разлагается в сумму x_1+x_2, где x_1 лежит в V_1, x_2 в V_2. Если выбрать базис пространства V так, чтобы первые m векторов составляли базис V_1, а последние n — базис V_2, то в таком базисе матрицы всех операторов T_g принимают «ящичный вид»:

$$\left(\begin{array}{c|c} T_g^1 & 0 \\ \hline 0 & T_g^2 \end{array}\right). \tag{4.23}$$

Тем самым представление $\{T_g\}$ *разлагается в сумму двух представлений* $\{T_g^1\}$, $\{T_g^2\}$ меньших размерностей: $T_g x = T_g^1 x + T_g^2 x$. Представление, не имеющее инвариантных подпространств и поэтому не разложимое в сумму представлений меньших размерностей, называется *неприводимым*. Поскольку любое представление, по крайней мере для встречающихся в физике групп, разлагается на неприводимые, для приложений важнее всего изучение неприводимых представлений.

Нетрудно заметить, что построенные выше спин-тензорные представления, вообще говоря, приводимы. Так, спин-тензоры валентности (2, 0) разлагаются в сумму симметрического и антисимметрического спин-тензоров:

$$S^{\mu\nu} = S_s^{\mu\nu} + S_a^{\mu\nu},$$

где

$$S_s^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(S^{\mu\nu} + S^{\nu\mu}), \quad S_a^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(S^{\mu\nu} - S^{\nu\mu}),$$

которые под действием операторов U переходят соответственно в симметрические и антисимметрические. Вопрос о построении всех неприводимых представлений группы SL (2) мы отложим до § 9. Пока же заметим, что «фундаментальное» представление $\{u\}$ (см. (3.28)) и сопряженное ему представление $\{v\}$ (см. (3.38)) неприводимы. В самом деле, если бы спинорное пространство $\mathbb{C}^2$ содержало инвариантное подпространство относительно $\{u\}$, то размерность такого подпространства была бы равна единице, т. е. существовал бы спинор ξ, преобразуемый всеми унимодулярными матрицами в кратные $\lambda\xi$; но это, как читатель может убедиться, неверно. Для сопряженного представления аргументация аналогична. С точностью до эквивалентности этим исчерпываются двумерные неприводимые представления SL (2) (чего мы, впрочем, не будем доказывать). Одномерное представление должно сопоставлять каждой матрице u «матрицу первого порядка», т. е. комплексное число z_u, так что $z_{u_1u_2}=$ $=z_{u_1u_2}$. Можно показать, что единственное одномерное представление группы SL (2) — «тривиальное», для которого $z_u=1$ при всех u. Очень важный пример спин-тензорного представления — представление S_1^1, тесно связанное с группой Лоренца. Мы изучим эту связь в следующем параграфе.

Место спин-тензоров в тензорной алгебре. Схема построения спин-тензоров, которой мы придерживались выше, близка к обычному современному построению тензоров над произвольным (действительным или комплексным) векторным пространством (ср., например, [16], гл. 1; [10], гл. 2 или [14], гл. 3). Единственное различие состоит в принятом определении дуальности пространств. Обычно «внешнее скалярное произведение», служащее для введения дуальности, предполагается линейным относительно векторов обоих пространств; для спин-тензоров же целесообразно воспользоваться скалярным произведением, линейным относительно одного из аргументов (спинора) и антилинейным относительно другого (коспинора). Поясним, зачем это нужно. Если бы мы определили дуальное пространство при помощи билинейного скалярного произведения, то по формуле (3.42) унимодулярному преобразованию u пространства спиноров соответствовало бы (в дуальном базисе) преобразование пространства коспиноров с матрицей $(u^T)^{-1}$ (а не $\bar{u}^{-1}$!). Но ввиду специфических свойств группы $SL(2)$ «контраградиентное» представление $\{(u^T)^{-1}\}$ эквивалентно «фундаментальному» представлению $\{u\}$, как мы показали выше. Вследствие этого «коспинорные» представления оказались бы равноценными «спинорным», и «смешанные» спин-тензоры валентности (r, s) не давали бы новых представлений по сравнению с «чистыми» валентности $(r+s, 0)$. Оказывается, однако, что с помощью «чистых» спин-тензоров можно получить лишь часть неприводимых представлений группы $SL(2)$; если же принять определение дуальности в том виде, как это сделано выше, то разложение «смешанных» представлений на неприводимые дает полный набор неприводимых представлений, т. е. все возможные неприводимые представления с точностью до эквивалентности.

Итак, построение тензорной алгебры над комплексным векторным пространством может быть выполнено в двух вариантах, в зависимости от принятого определения дуальности пространств; для целей теории представлений в случае пространства $\mathbb{C}^2$ с действующей на нем группой $SL(2)$ выгоднее воспользоваться вариантом, принятым выше. Такое положение вещей нисколько не удивительно, так как основная роль тензоров и состоит в поставке «материала» для представления групп [1]).

В избранном варианте построения тензорной алгебры несколько изменяется, по сравнению с привычным, закон преобразования компонент при замене базиса. Пусть базис $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в спинорном пространстве заменяется базисом

$$\varepsilon'_\mu = u^\nu_\mu \varepsilon_\nu, \tag{4.24}$$

что вызывает замену дуального базиса

$$\varepsilon'^{\dot\mu} = (\bar{u}^{-1})^{\dot\mu}_{\dot\nu} \varepsilon^{\dot\nu}. \tag{4.25}$$

[1]) Приведенная здесь точка зрения, обычная у алгебраистов со времени Фробениуса и Шура, приобрела права гражданства у физиков лишь в последние годы, в особенности благодаря работам С. Вайнберга.

Тогда компоненты того же спин-тензора S (4.12) в новом базисе выражаются через компоненты S в старом базисе по формуле

$$S'^{\nu_1 \dots \nu_r}_{\dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_s} = (u^{-1})^{\nu_1}_{\varkappa_1} \dots (u^{-1})^{\nu_r}_{\varkappa_r} (\bar{u})^{\dot{\lambda}_1}_{\dot{\mu}_1} \dots (\bar{u})^{\dot{\lambda}_1}_{\dot{\mu}_s} S^{\varkappa_1 \dots \varkappa_r}_{\dot{\lambda}_1 \dots \dot{\lambda}_s}. \quad (4.26)$$

Выражение (4.26) очень напоминает закон представления группы $SL(2)$, выраженный в компонентах (ср. (4.19)); различие в правых частях сводится к замене u на u^{-1}. Однако эти формулы имеют совершенно разный смысл: в (4.19) речь идет о преобразовании спин-тензора S в другой спин-тензор S', который описывается в том же базисе, тогда как в (4.26) один и тот же спин-тензор описывается в разных базисах.

Преобразование (4.26) отличается от обычного закона преобразования тензорных компонент тем, что матрицы, осуществляющие суммирование по нижним индексам, заменены комплексно сопряженными. Точно такое же различие получилось в (4.19) по сравнению с тензорными представлениями групп, действующих в действительных пространствах (например, группы вращений или группы Лоренца).

Между спин-тензорами и «обычными» тензорами над пространством Минковского существует важная связь: каждый «обычный» тензор может быть выражен через спин-тензор соответствующей валентности; но спин-тензоры не всегда могут быть выражены через «обычные» тензоры. Мы вернемся к этому вопросу в следующем параграфе.

§ 5. Накрытие группы Лоренца

Связь между векторами и спинорами. В исходной мотивировке введения спиноров, приведенной в начале § 3, были получены формулы (3.2), (3.5), выражающие координаты x_α как билинейные функции от двух пар комплексных переменных ξ^μ, $\dot{\xi}^\nu$ ($\mu, \nu = 1, 2$). Если считать ξ^μ координатами спинора ξ, а $\dot{\xi}^\nu$ — координатами коспинора $\dot{\xi}$ с верхними индексами (см. (3.24)), то смешанный спин-тензор вида $2\xi \otimes \dot{\xi}$ имеет компоненты $S^{\mu\dot{\nu}} = 2\xi^\mu \dot{\xi}^\nu$. По техническим причинам

нам будет удобно отождествить x_α в формуле (3.5) с *ковариантными* компонентами вектора x (это приведет к традиционному виду γ-матриц Дирака). Тогда имеем

$$S^{1\dot{1}} = x_0 + x_3, \quad S^{1\dot{2}} = x_1 - ix_2,$$
$$S^{2\dot{1}} = x_1 + ix_2, \quad S^{2\dot{2}} = x_0 - x_3. \tag{5.1}$$

Таким образом можно получить лишь спин-тензоры частного вида; прежде всего, матрица $(S^{\mu\dot{\nu}})$ эрмитова, так как координаты x_α действительны. Далее,

$$\det|S^{\mu\dot{\nu}}| = 2\xi^1\bar{\xi}^1 \cdot 2\xi^2\bar{\xi}^2 - 2\xi^1\bar{\xi}^2 \cdot 2\xi^2\bar{\xi}^1 = 0,$$

и из (5.1) следует, что $(x_0)^2-(x_1)^2-(x_2)^2-(x_3)^2=0$. Поэтому спин-тензоры (5.1) соответствуют лишь *изотропным* векторам x. Чтобы расширить соответствие, мы откажемся теперь от специального вида компонент $S^{\mu\dot{\nu}}$, полученного в начале § 3 из геометрических соображений, и будем исходить из произвольного смешанного спин-тензора S валентности (1, 1), заданного с помощью верхних индексов. Тогда формулы (5.1) устанавливают взаимно однозначное соответствие между такими спин-тензорами и четверками комплексных чисел (x_α). Изображая спин-тензоры в виде матриц, можно переписать (5.1) в виде

$$(S^{\mu\dot{\nu}}) = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

где

$$x_0 = \frac{1}{2}(S^{1\dot{1}} + S^{2\dot{2}}), \quad x_1 = \frac{1}{2}(S^{1\dot{2}} + S^{2\dot{1}}),$$
$$x_2 = \frac{i}{2}(S^{1\dot{2}} - S^{2\dot{1}}), \quad x_3 = \frac{1}{2}(S^{1\dot{1}} - S^{2\dot{2}}). \tag{5.3}$$

Рассмотрим случай, когда эти числа действительны или, что то же, матрица S эрмитова.

Числа x_α можно истолковать как ковариантные компоненты вектора x в пространстве Минковского относительно некоторого псевдоортонормированного базиса; соответствующую этому вектору матрицу (5.2) обозначим через $\tilde{x}$.

Введем еще компоненты спин-тензора S с нижними индексами:

$$S_{\mu\dot{\nu}} = C_{\mu\varkappa} C_{\dot{\nu}\dot{\lambda}} S^{\varkappa\dot{\lambda}},$$
$$\begin{pmatrix} S_{1\dot{1}} & S_{1\dot{2}} \\ S_{2\dot{1}} & S_{2\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^{2\dot{2}} & -S^{2\dot{1}} \\ -S^{1\dot{2}} & S^{1\dot{1}} \end{pmatrix}; \tag{5.4}$$

тогда из (5.2) следует симметричная ей формула с контравариантными компонентами вектора x:

$$(S_{\mu\dot{\nu}}) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Введем матрицы Паули $\sigma_k (k = 1, 2, 3)$, матрицы $\tilde{\sigma}_k = -\sigma_k$ и $\sigma_0 = \tilde{\sigma}_0 = \mathbf{1}$ (единичная матрица):

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

$$\tilde{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$
$$\tilde{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Применяя обычное правило подъема индексов к «матричным 4-векторам» (σ_α), $(\tilde{\sigma}_\alpha)$, мы можем записать (5.2) и (5.5) в виде

$$(S^{\mu\dot{\nu}}) = x_\alpha \tilde{\sigma}^\alpha = x^\alpha \tilde{\sigma}_\alpha, \tag{5.8}$$
$$(S_{\mu\dot{\nu}}) = x^\alpha \sigma_\alpha^T = x_\alpha \sigma^{\alpha T}. \tag{5.9}$$

Таким образом, *установлено взаимно однозначное линейное соответствие между векторами x пространства Минковского и смешанными спин-тензорами $\tilde{x}$ валентности* (1, 1), *изображаемыми (в данных дуальных базисах) эрмитовыми матрицами.* Это соответствие имеет фундаментальное значение для спинорного анализа, поскольку с его помощью понятия, относящиеся к пространственно-временно́му описанию событий, переводятся на «спинорный язык». Следует, однако, отметить, что соответствие $x \to \tilde{x}$ было построено с помощью произвольно фиксированных базисов (e_α) в пространстве Минковского, относительно которого берутся координаты x_α, и (ε_μ) в пространстве спиноров, относительно которого берутся компоненты спин-тензоров $S^{\mu\dot\nu}$. Неинвариантный характер соответствия в этом случае не может быть устранен. При любом выборе базисов все дальнейшие рассуждения нисколько не изменяются, так что для наших целей подходит любое соответствие описанного рода. Надо только иметь в виду, что не существует какого-либо «естественного» соответствия между 4-векторами и смешанными спин-тензорами, которое вытекало бы из самой природы этих объектов.

Приведем еще одну формулу, которая понадобится нам в дальнейшем. Свертывая нижние и верхние компоненты спин-тензора S, из (5.2) и (5.5) получаем

$$S_{\mu\dot\varkappa}S^{\nu\dot\varkappa}=\delta^{\nu}_{\mu}(x,\ x),\qquad S_{\lambda\dot\mu}S^{\lambda\dot\nu}=\delta^{\dot\nu}_{\dot\mu}(x,\ x). \tag{5.10}$$

Накрытие специальной группы Лоренца. Рассмотрим представление группы $SL(2)$ в пространстве спин-тензоров $S^{\mu\dot\nu}$ валентности (1, 1). В этом частном случае набор компонент спин-тензора удобно истолковать как матрицу, а формулу представления (4.22) — переписать в матричной форме. Согласно (4.22)

$$S'^{\mu\dot\nu}=u^{\mu}_{\varkappa}\bar u^{\dot\nu}_{\dot\lambda}S^{\varkappa\dot\lambda}. \tag{5.11}$$

При умножении матриц суммирование производится по одинаковым индексам, а именно по второму индексу первого множителя, нумерующему столбцы, и первому индексу второго множителя, нумерующему строки. Если один из индексов пишется сверху, а другой снизу, то верхний считается первым, а нижний вторым. По этому соглашению (5.11) должно пониматься как умножение матриц u, S, $\overset{+}{u}$:

$$S'^{\mu\dot\nu}=(uS\bar u^{T})^{\mu\dot\nu}$$

или, что то же,

$$S'=uS\overset{+}{u}. \tag{5.12}$$

Легко непосредственно убедиться, что (5.12) задает представление группы $SL(2)$: если $u=u_1u_2$, то из $S'= \overset{+}{u}_2S\overset{+}{u}_2$, $S''=u_1S'\overset{+}{u}_1$ следует $S''=(u_1u_2)S(\overset{+}{u}_2\overset{+}{u}_1)=uS\overset{+}{u}$.

Положим теперь в (5.12) $S=\tilde{x}$, т. е. рассмотрим случай эрмитовой матрицы S. Легко проверить, что в этом случае и S' оказывается эрмитовой матрицей:

$$\overset{+}{S}{}' = (uS\overset{+}{u})^{+} = u\overset{+}{S}\overset{+}{u} = uS\overset{+}{u} = S'.$$

Поэтому S' имеет форму $\tilde{x}'$, где x' — некоторый другой вектор пространства Минковского, и (5.12) принимает вид

$$\tilde{x}' = u\tilde{x}\overset{+}{u}. \tag{5.13}$$

Ясно, что (5.12) задает однозначное преобразование $\tilde{x}$ в $\tilde{x}'$, а ввиду соответствия между 4-векторами x и матрицами $\tilde{x}$ — также однозначное и притом линейное преобразование x в x':

$$x'_\alpha = \Lambda^\beta_\alpha x_\beta,$$

где матрица Λ^β_α определяется бинарной матрицей u. Так как это преобразование переводит действительные числа x_β опять в действительные числа x'_α, коэффициенты Λ^β_α действительны.

Переходя в (5.12) к определителям и замечая, что $\det|u| = \det|\overset{+}{u}| = 1$,

$$\det|\tilde{x}| = (x_0)^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2 - (x_3)^2 = (x,\ x), \tag{5.14}$$

имеем $(x',\ x') = (x,\ x)$; следовательно, Λ — преобразование Лоренца. Итак, мы сопоставили каждой бинарной матрице u преобразование Лоренца Λ.

Тем самым задано представление группы $SL\,(2)$ в действительном четырехмерном пространстве Минковского. Если применять формулу (5.12) к любым комплексным координатам (x_α), то это представление может быть расширено до представления в четырехмерном комплексном пространстве; это и есть исходное спин-тензорное представление валентности (1, 1). Итак, преобразования Лоренца получаются путем выделения в S^1_1 *действительного* инвариантного подпространства, состоящего из спин-тензоров с эрмитовыми матрицами $(S^{\mu\dot{\nu}})$. Заметим еще, что если u — унитарная матрица, то Λ оказывается вращением; в самом деле, в этом случае $\overset{+}{u}=u^{-1}$, $\tilde{x}'=u\tilde{x}u^{-1}$, а потому $\mathrm{Sp}\,\tilde{x}'=\mathrm{Sp}\,\tilde{x}$. Так как

$\mathrm{Sp}\tilde{x}=2x_0$, $\mathrm{Sp}\tilde{x}'=2x'_0$, это означает, что $x'_0=x_0$, т. е. $\Lambda e_0=e_0$.

Нетрудно показать, что указанным способом получаются лишь специальные, т. е. собственные ортохронные преобразования Лоренца. В самом деле, для $u=1$ имеем $\det|u|=1$, $\Lambda_0^0>0$. При непрерывном изменении u оба эти соотношения должны сохраняться (ср. (1.21), (1.22)), и наше утверждепие вытекает из доказанной в § 3 связности группы $SL(2)$. Итак, соответствие $u\to\Lambda$ приводит лишь к специальным преобразованиям Лоренца. Как мы покажем ниже, таким способом может быть получена вся группа $L_+^\uparrow$.

Обозначим соответствие $u\to\Lambda$ через h: $h(u)=\Lambda$. Оказывается, это соответствие переводит произведение u_1u_2 в произведение соответствующих преобразований Лоренца $\Lambda_1\Lambda_2$:

$$h(u_1u_2)=h(u_1)\,h(u_2). \tag{5.15}$$

(Отображение одной группы в другую, обладающее таким свойством, называется *гомоморфизмом*). Доказательство (5.15) не составляет труда: по определению h $\Lambda_2x=x'$ равносильно $\tilde{x}'=u_2\tilde{x}\overset{+}{u}_2$, $\Lambda_1x'=x''$ равносильно $\tilde{x}''=u_1\tilde{x}'\overset{+}{u}_1$, откуда $\tilde{x}''=(u_1u_2)\,\tilde{x}\,(u_1u_2)^+$; а это значит, что x'' получается из x преобразованием $h(u_1u_2)$.

Покажем теперь, что все преобразования из $L_+^\uparrow$ можно получить описанным выше способом. Прежде всего рассмотрим бинарную матрицу

$$r=\cos\frac{\vartheta}{2}+i\,(n\sigma)\sin\frac{\vartheta}{2}=$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\frac{\vartheta}{2}+in_3\sin\frac{\vartheta}{2} & i\,(n_1-in_2)\sin\frac{\vartheta}{2}\\ i\,(n_1+in_2)\sin\frac{\vartheta}{2} & \cos\frac{\vartheta}{2}-in_3\sin\frac{\vartheta}{2}\end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

где $n=n_1e_1+n_2e_2+n_3e_3$ — «пространственный» вектор единичной длины, т. е. $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$, ϑ — произвольный угол, а $n\sigma=n_1\sigma_1+n_2\sigma_2+n_3\sigma_3$ — линейная комбинация матриц Паули. Матрицы r унитарны: так как σ_k эрмитовы, имеем

$$\overset{+}{r}=\cos\frac{\vartheta}{2}-i\,(n\sigma)\sin\frac{\vartheta}{2}\,,$$

откуда $rr^{+}=1$. Можно показать, что всякая унитарная унимодулярная матрица представима в виде (5.16); следовательно, (5.16) есть общий вид матриц группы $SU(2)$.

Легко проверить с помощью (5.12), что $u=r$ задает вращение R вокруг оси $\boldsymbol{n}$ на угол ϑ. Таким образом, эта формула позволяет получить все собственные вращения (с определителем 1).

Далее рассмотрим бинарную матрицу

$$b=\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{2}+(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\operatorname{sh}\frac{\vartheta}{2}=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{2}+n_3\operatorname{sh}\frac{\vartheta}{2} & (n_1-in_2)\operatorname{sh}\frac{\vartheta}{2}\\ (n_1+in_2)\operatorname{sh}\frac{\vartheta}{2} & \operatorname{ch}\frac{\vartheta}{2}-n_3\operatorname{sh}\frac{\vartheta}{2}\end{pmatrix} \tag{5.17}$$

с теми же обозначениями. Эта матрица эрмитова. Легко проверить, что соответствующее преобразование Λ есть буст B, переводящий e_0 во времениподобный вектор

$$x=\operatorname{ch}\vartheta\cdot e_0-n_1\operatorname{sh}\vartheta\cdot e_1-n_2\operatorname{sh}\vartheta\cdot e_2-n_3\operatorname{sh}\vartheta\cdot e_3. \tag{5.18}$$

Обозначим этот буст через $B(x)$. Так как $\boldsymbol{n}$ и ϑ здесь произвольны, мы можем получить в качестве Λ любой буст (ср. (1.25)).

Теперь уже легко доказать, что когда u пробегает всю группу $SL(2)$, соответствующее преобразование $\Lambda=h(u)$ пробегает *всю* специальную группу Лоренца $L_{+}^{\uparrow}$. В самом деле, из разложения (1.33) для любого Λ из $L_{+}^{\uparrow}$ получаем буст B и собственное вращение R. Найдем такие бинарные матрицы r, b, что $R=h(r)$, $B=h(b)$; тогда в силу (5.15) $h(br)=BR=\Lambda$.

Заметим, что соответствие между бинарными матрицами u и преобразованиями Лоренца Λ не взаимно однозначно [1]). Например, если заменить u матрицей $-u$ (также бинарной), то в силу (5.12) получается то же Λ. Оказывается, что для каждого Λ существует в точности

---

[1]) Взаимно однозначный гомоморфизм одной группы на другую называется *изоморфизмом*. Таким образом, группы $L_{+}^{\uparrow}$ и $SL(2)$, тесно связанные между собой, не изоморфны.

две матрицы u, для которых $h(u)=\Lambda$; тогда ясно, что они отличаются лишь знаком.

В случае, когда $\Lambda=I$, $h(u)=I$ означает, что $\tilde{x}=u\tilde{x}\dot{\tilde{u}}$ для всех x, т. е. для всевозможных эрмитовых матриц $\tilde{x}$. Поскольку каждая матрица есть линейная комбинация эрмитовых (например, σ_a), имеем $a=ua\dot{\tilde{u}}$ для *всех* матриц a. Полагая, в частности, $a=1$, мы видим, что $\dot{\tilde{u}}=u^{-1}$; следовательно, $a=uau^{-1}$ для всех матриц a, т. е. матрица u перестановочна со всеми матрицами a. Но тогда u кратна единичной матрице: $u=\lambda\cdot 1$ (это следует из леммы Шура, Приложение II, или может быть доказано непосредственно). Поскольку $\det|u|=1$, должно быть $\lambda=\pm 1$, $u=\pm 1$.

Пусть теперь u, u_1 — бинарные матрицы; покажем, что если $h(u)=h(u_1)$, то $u_1=\pm u$. В самом деле, допустим, что $h(u)=h(u_1)$; тогда в силу (5.15) $h(u_1u^{-1})=$ $=h(u_1)h(u^{-1})=h(u_1)h(u)^{-1}=I$, откуда, по ранее доказанному, $u_1u^{-1}=+1$ или -1, т. е. $u_1=\pm u$. Итак, каждое преобразование Лоренца из группы $L_+^\uparrow$ соответствует в точности двум бинарным матрицам $\pm u$. Этот факт выражают, говоря, что h есть *двулистное накрытие группы* $L_+^\uparrow$ *группой* $SL(2)$.

Важно иметь в виду, что двулистный характер накрытия есть «глобальное» явление, т. е. связанное со строением групп в целом, но не проявляющееся в окрестности данных элементов Λ, u; очевидно, если $h(u)=\Lambda$, то для преобразований Лоренца, близких к Λ, однозначно находятся накрывающие бинарные матрицы, близкие к u. В частности, матрицы u, близкие к 1, и преобразования Λ, близкие к I, находятся во взаимно однозначном соответствии. Это обстоятельство, как мы увидим, позволяет отождествить алгебры Ли обеих групп.

Отображение h, рассматриваемое лишь на подгруппе $SU(2)$, задает *двулистное накрытие группы собственных вращений* $SO(3)$. В самом деле, как мы видели, для унитарной матрицы r преобразование $h(r)$ оказывается вращением с определителем 1, и каждое собственное вращение R накрывается двумя матрицами $\pm r$ (см. (5.16)).

Нам понадобятся дальше некоторые специальные выражения для бинарных матриц, накрывающих бусты. Фиксируем времениподобный вектор

$$x = m\,(\operatorname{ch}\vartheta\cdot e_0 + n_1 \operatorname{sh}\vartheta\cdot e_1 + n_2 \operatorname{sh}\vartheta\cdot e_2 + \\ + n_3 \operatorname{sh}\vartheta\cdot e_3) \qquad (5.19)$$

и положим

$$b\,(x) = \operatorname{ch}\frac{\vartheta}{2} - (\boldsymbol{n\sigma})\operatorname{sh}\frac{\vartheta}{2}. \qquad (5.20)$$

Тогда, как легко проверить, $b(x)^2 = \operatorname{ch}\vartheta - (\boldsymbol{n}\sigma)\operatorname{sh}\vartheta$, откуда для эрмитовой матрицы $b\,(x)$ и матрицы

$$\tilde{m} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

имеем

$$b\,(x)\,\tilde{m}\overset{+}{b}\,(x) = \tilde{x}. \qquad (5.21)$$

Буст, накрываемый матрицей $b\,(x)$, обозначим через $B(x)$. Переменив знак ϑ, получаем матрицу, накрывающую «антибуст» $B^{-1}(x)$. Очевидно, для вектора $\mathrm{m} = (m, 0, 0, 0)$ имеем $B(x)\mathrm{m} = x$.

Зададим теперь преобразование Лоренца Λ. Тогда последовательное выполнение преобразований $B\,(x)$, Λ, $B^{-1}(\Lambda x)$ переводит вектор m в себя (см. схему):

$$\begin{tikzcd} & m \arrow[dl, "B(x)"'] & \\ x \arrow[rr, "\Lambda"'] & & \Lambda x \arrow[ul, "B^{-1}(\Lambda x)"'] \end{tikzcd}$$

Тем самым при любом фиксированном времениподобном векторе x преобразование

$$R\,(\Lambda,\ x) = B^{-1}\,(\Lambda x)\,\Lambda B\,(x) \qquad (5.22)$$

есть вращение. Построим теперь бинарную матрицу

$$u = b\,(\Lambda x)\,r\,(\Lambda,\ x)\,b^{-1}\,(x), \qquad (5.23)$$

где $r(\Lambda, x)$ накрывает $R(\Lambda, x)$ (см. (5.16)). В силу свойства гомоморфизма (5.15) бинарной матрице u соответствует

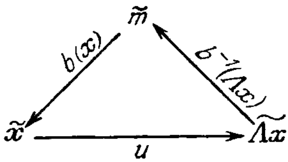
$$B(\Lambda x)R(\Lambda, x)B^{-1}(x)=B(\Lambda x)B^{-1}(\Lambda x)\Lambda B(x)B^{-1}(x)=\Lambda,$$

т. е. то преобразование Лоренца Λ, которое было задано вначале. Таким образом, мы приходим к формулам, выражающим любую бинарную матрицу через матрицы, накрывающие вращения и бусты; эти выражения зависят от выбора вектора x (см. (5.20)):

$$\begin{aligned} u&=b(\Lambda x)\,r(\Lambda, x)\,b^{-1}(x),\\ u^{-1}&=b(x)\,r^{-1}(\Lambda, x)\,b^{-1}(\Lambda x); \end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned} r(\Lambda, x)&=b^{-1}(\Lambda x)\,u\,b(x),\\ r^{-1}(\Lambda, x)&=b^{-1}(x)\,u^{-1}b(\Lambda x). \end{aligned} \tag{5.25}$$

Как видно из схемы



преобразование $r(\Lambda, x)$ переводит эрмитову матрицу $\tilde{m}$ в себя, как это и должно быть для унитарной матрицы ввиду $\bar{r}=r^{-1}$.

«Двузначные» представления. Мы начали с поисков двумерного представления группы Лоренца. Означают ли предыдущие построения, что эта задача решена? Строго говоря, это не так. Дело в том, что мы построили соответствие в обратном направлении: матрицам u мы сопоставили преобразования Лоренца; представление же группы требует, чтобы элементам группы — в данном случае преобразованиям Лоренца — соответствовали матрицы. При попытке обратить это соответствие мы видим, что каждому (собственному ортохронному) Λ соответствуют *две* матрицы $\pm u$. При умножении Λ_1 на Λ_2 эти матрицы умножаются с точностью до знака, т. е. матрица, отвечающая $\Lambda_1\Lambda_2$, может отличаться знаком от произведения матриц, отвечающих

Λ_1, Λ_2. В таком случае говорят, что задано *двузначное* представление — в данном случае группы $L_+^\uparrow$ — бинарными матрицами.

Это не случайно: можно доказать, что группа $L_+^\uparrow$ вообще не имеет «однозначных» (т. е. обычных, определенных выше в § 2) представлений размерности 2, кроме тождественного, сопоставляющего каждому Λ матрицу 1. Между тем случай размерности 2 в физике очень важен: двухкомпонентные поля служат для описания электрона, позитрона и нейтрино. Отсюда ясно, почему применяются «двузначные» представления группы Лоренца.

Однако существует способ обойти эту трудность, *заменив группу* $L_+^\uparrow$ *бинарной группой*. Это имеет три важных преимущества:

(1) Все представления группы $SL(2)$ однозначны; таким образом, отпадает надобность в неестественном с алгебраической точки зрения понятии, каким является «двузначное» представление.

(2) При отыскании представлений интересуются прежде всего неприводимыми представлениями, не разложимыми на более простые. Оказывается, что группа $L_+^\uparrow$ имеет (однозначные) неприводимые представления лишь нечетных размерностей, а в четных размерностях — только «двузначные». Между тем группа $SL(2)$ имеет (однозначные) неприводимые представления всех размерностей.

(3) Аналитические свойства группы $SL(2)$ проще, чем у группы Лоренца: сложные условия псевдоортогональности (1.20), налагаемые на матрицы четвертого порядка, заменяются здесь единственным условием $\det|u|=1$, которому должна удовлетворять матрица второго порядка, — правда, с комплексными элементами. Это обстоятельство весьма облегчает отыскание представлений.

Связь между представлениями обеих групп состоит в следующем. Пусть T — представление группы Лоренца $L_+^\uparrow$ в (комплексном или действительном) векторном пространстве V; это значит, что каждому преобразованию Λ из $L_+^\uparrow$ соответствует оператор T_Λ, действующий в V (или матрица, если в V выбран базис).

Тогда каждой бинарной матрице u можно поставить в соответствие оператор $T_\Lambda h$ в том же пространстве V, получаемый следующим образом: берут для каждой матрицы u накрываемое ею преобразование $h(u)=\Lambda$, а затем, пользуясь уже известным представлением T, строят матрицу T_Λ. В результате из каждого представления $L_+^\uparrow$ получается представление $SL(2)$. Попытаемся теперь выполнить обратный переход. Пусть дано представление T группы $SL(2)$ в пространстве V; тогда каждой бинарной матрице u соответствует матрица T_u, задающая оператор в V. Возьмем специальное преобразование Лоренца Λ; его накрывают две матрицы $\pm u$, и естественно сопоставить преобразованию Λ пару матриц T_u, T_{-u}. Оказывается, что в каждом представлении группы $SL(2)$ либо матрицы T_u, T_{-u} совпадают для всех u, либо $T_{-u}=-T_u$ для всех u. В случае спин-тензорных представлений S_s^r, как видно из их определения (4.16), имеем $T_{-u}=T_u$ при четном $r+s$, $T_{-u}=-T_u$ при нечетном $r+s$. Соответственно этому из (однозначных) представлений группы $SL(2)$ получаются однозначные или «двузначные» представления специальной группы Лоренца.

Два простейших примера получаются из самой процедуры накрытия. Рассмотрим «фундаментальное» представление валентности (1, 0) группы $SL(2)$, при котором каждой бинарной матрице u сопоставляется оператор (3.28), действующий на пространстве спиноров $\mathbb{C}^2$. В этом случае T_u можно отождествить с u, поскольку матрица T_u совпадает с матрицей u по самому определению представления. Посмотрим, какое представление группы $L_+^\uparrow$ получается из «фундаментального» представления $SL(2)$. По описанному выше правилу надо сопоставить каждому специальному преобразованию Лоренца Λ сначала пару накрывающих его матриц $\pm u$, а затем (совпадающие или нет) операторы представления T_u, T_{-u}. В данном случае эти операторы различны, как и должно быть в случае нечетного $r+s$, и отождествляются с матрицами u, $-u$. Получается «двузначное» представление $\Lambda \to \pm u$, обратное накрытию h.

В качестве второго примера рассмотрим представление группы $SL(2)$ валентности (1, 1), т. е. смешанными спин-тензорами $S^{\mu\dot{\nu}}$. В этом представлении матрицам u, $-u$ соответствует один и тот же оператор (см. (5.12)), так что $T_{-u}=T_u$. Матрицей $T_u=T_{-u}$ является как раз матрица того преобразования Лоренца Λ, которое накрывают u, $-u$. Поэтому из представления валентности (1,1) группы $SL(2)$ получается однозначное представление, в котором каждому Λ соответствует $T_\Lambda=\Lambda$, иначе говоря, «фундаментальное» представление группы $L_+^\uparrow$. Это представление однозначно, как и должно быть в случае четного $r+s$. Ряд более интересных примеров будет рассмотрен в дальнейшем.

Наряду с указанными выше преимуществами группа SL (2) имеет существенный недостаток по сравнению с группой Лоренца: она соответствует лишь $L_+^\uparrow$, т. е. связной подгруппе L, содержащей тождественное преобразование, и не имеет никакого отношения к дискретным преобразованиям P, T, играющим важную роль в теории поля.

Связь между тензорами и спин-тензорами. Основные формулы (5.8), (5.9) сопоставляют векторам пространства Минковского спин-тензоры валентности (1, 1). Поскольку любой тензор над пространством 4-векторов (т. е. тензор, компоненты которого преобразуются по группе Лоренца) может быть представлен в виде формального полинома от 4-векторов, отсюда сразу же вытекает общее выражение тензоров через спин-тензоры, которое мы проиллюстрируем на примере двухвалентного тензора $F_{\alpha\beta}$: ему соответствует спин-тензор валентности (2, 2)

$$S^{\nu_1\nu_2\dot{\mu}_1\dot{\mu}_2}=(\tilde{\sigma}^\alpha)^{\nu_1\dot{\mu}_1}(\tilde{\sigma}^\beta)^{\nu_2\dot{\mu}_2}F_{\alpha\beta}.$$

Все соотношения тензорной алгебры могут быть представлены как соотношения между соответствующими спин-тензорами. Например, свертывание векторов сводится к свертыванию спин-тензоров (ср. (5.10)): если $S=x^\alpha\tilde{\sigma}_\alpha$, $T=y^\beta\tilde{\sigma}_\beta$, то

$$x^\alpha y_\alpha=\frac{1}{2}S^{\nu\dot{\mu}}T_{\nu\dot{\mu}}.$$

Таким образом, тензорная алгебра может быть полностью сведена к спин-тензорной: все соотношения, формулируемые с помощью тензорного аппарата, могут быть записаны и на спин-тензорном языке. Обратное, однако, неверно: не все спин-тензоры могут быть сведены к тензорам. В этом смысле спинорная алгебра может рассматриваться как обобщение обычной тензорной алгебры.

§ 6. Биспиноры Дирака

Накрытие полной группы Лоренца. Естественно попытаться расширить построенное выше накрытие специальной группы Лоренца $L_+^\uparrow$ бинарной группой $SL(2)$ до накрытия полной группы Лоренца L. Только в этом случае можно будет удовлетворительно описать спинорные поля, допускающие пространственное отражение (см. ниже, § 7), а также «обращение времени».

Простейшая идея состоит в том, чтобы расширить группу $SL(2)$ до некоторой группы преобразований *того же* пространства $\mathbb{C}^2$, накрывающей полную группу Лоренца. Следующее простое рассуждение (ср. [4]) доказывает, однако, что это невозможно. Предположим, что в «расширенной» группе существует преобразование u_P, накрывающее пространственное отражение P. Поскольку все вращения R перестановочны с P, $R\mathsf{P}=\mathsf{P}R$, то должно быть $ru_P=\pm u_P r$; при $r=1$ в этом равенстве должен быть знак плюс, сохраняющийся при непрерывном изменении r. Следовательно, матрица u_P перестановочна со всеми r из группы $SU(2)$ и, поскольку «фундаментальное» представление этой группы неприводимо, u_P кратна единичной матрице 1 (лемма Шура, Приложение II). Но тогда u_P перестановочна со всеми матрицами $SL(2)$; в силу накрытия h это влечет за собой перестановочность P со всеми преобразованиями группы $L_+^\uparrow$, что неверно. Итак, оставаясь в пределах того же спинорного пространства $\mathbb{C}^2$, нельзя построить накрывающую группу для $L^\uparrow$ (и, тем более, для всей группы L).

Чтобы сделать возможным такое построение, надо расширить пространство спиноров. Рассмотрим всевозможные пары, состоящие из спинора и коспинора:

$$\psi=\{\xi, \tilde{\eta}\}. \tag{6.1}$$

Назовем такие пары *биспинорами* и введем для них операции сложения и умножения на комплексные числа «покомпонентно», т. е. по правилам

$$\begin{gathered}\{\xi', \dot\eta'\} + \{\xi'', \dot\eta''\} = \{\xi' + \xi'', \dot\eta' + \dot\eta''\}, \\ \lambda\{\xi, \dot\eta\} = \{\lambda\xi, \lambda\dot\eta\}.\end{gathered} \tag{6.2}$$

Полученное комплексное векторное пространство обозначается $\mathbb{C}^2 \oplus \dot{\mathbb{C}}^2$, где $\oplus$ означает алгебраическую конструкцию «прямой суммы» пространств, заданную правилами (6.2). Пространство биспиноров разлагается на два подпространства в силу соотношения

$$\{\xi, \dot\eta\} = \{\xi, 0\} + \{0, \dot\eta\}; \tag{6.3}$$

отождествляя биспиноры вида $\{\xi, 0\}$ со спинорами ξ, а биспиноры вида $\{0, \dot\eta\}$ с коспинорами $\dot\eta$, можно считать, что каждый биспинор является формальной суммой спинора и коспинора. Поэтому базисы $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $(\dot\varepsilon^1, \dot\varepsilon^2)$ в совокупности составляют базис для биспиноров; следовательно, пространство биспиноров четырехмерно. В компонентах биспинор представляется в виде

$$\psi = \xi^1\varepsilon_1 + \xi^2\varepsilon_2 + \eta_{\dot 1}\dot\varepsilon^1 + \eta_{\dot 2}\dot\varepsilon^2, \tag{6.4}$$

или в виде столбца

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \eta_{\dot 1} \\ \eta_{\dot 2} \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

В этой последней форме биспиноры и были введены Дираком [1]). Когда разделение компонент ψ на спинорные и коспинорные несущественно, мы будем их обозначать также через ψ_μ, $\mu = 1, 2, 3, 4$.

Среди линейных преобразований пространства биспиноров отметим прежде всего преобразования, за-

[1]) Тот факт, что четырехкомпонентные «величины» Дирака сводятся к парам спиноров, был вскоре после этого установлен Ван дер Варденом.

данные сопряженными представлениями группы $SL\,(2)$, $\{u\}$ и $\{v\}$:

$$\xi' = u\xi, \quad \dot{\eta}' = v\dot{\eta}, \tag{6.6}$$

или в матричной форме, в дуальных базисах: $\psi' = \hat{u}\psi$,

$$\hat{u} = \left(\begin{array}{c|c} u & 0 \\ \hline 0 & \overset{+}{u}{}^{-1} \end{array}\right). \tag{6.7}$$

Очевидно, представление $\{\hat{u}\}$ группы $SL\,(2)$ приводимо: оно разлагается на неприводимые представления $\{u\}$, $\{v\}$. Далее, это представление точно, поскольку в нем разные бинарные матрицы u изображаются разными преобразованиями $\hat{u} = T_u$. В силу взаимно однозначного соответствия между бинарными матрицами и преобразованиями пространства биспиноров $\hat{u}$, можно считать, что эти последние составляют другую реализацию группы $SL\,(2)$, накрывающей по указанным выше правилам специальную группу Лоренца. В этой новой (четырехмерной) реализации удается осуществить расширение группы $SL\,(2)$ до бóльшей группы, накрывающей полную группу Лоренца.

Алгебра γ-матриц. Общие преобразования Лоренца получаются из специальных умножением на один из операторов P (пространственного отражения), T (обращения времени) или PT. Операторы P, T являются частными случаями отражения относительно трехмерной плоскости пространства Минковского $\mathscr{M}$, которое можно определить следующим образом. Пусть a — неизотропный вектор $\mathscr{M}$, т. е. $(a, a) \neq 0$. Тогда любой вектор x можно разложить на составляющую x', коллинеарную a, и x'', ортогональную a:

$$x = x' + x'', \quad x' = \lambda a, \quad (x'', a) = 0, \tag{6.8}$$

откуда без труда находим λ; имеем

$$x' = \frac{(x, a)}{(a, a)}\, a, \quad x'' = x - \frac{(x, a)}{(a, a)}\, a.$$

Отражение относительно трехмерной плоскости, ортогональной a, можно определить как преобразование пространства $\mathscr{M}$, не меняющее векторов этой плоскости и меняющее знак ортогональных ей векторов:

$$\mathsf{P}_a x'' = x'', \quad \mathsf{P}_a x' = -x', \quad \mathsf{P}_a x = -x' + x'',$$

откуда

$$\mathsf{P}_a x = x - 2\frac{(x,\, a)}{(a,\, a)}\, a. \tag{6.9}$$

Легко проверить, что

$$\mathsf{P}_a^2 = I. \tag{6.10}$$

Оператор пространственного отражения и оператор обращения времени выражаются через операторы P_a:

$$\mathsf{P} = \mathsf{P}_{e_1}\mathsf{P}_{e_2}\mathsf{P}_{e_3}, \quad \mathsf{T} = \mathsf{P}_{e_0}. \tag{6.11}$$

Мы хотим построить в пространстве биспиноров $\mathbb{C}^4$ линейные преобразования, накрывающие операторы P_a. Пусть a — единичный или «антиединичный» вектор, т. е. $(a,\ a) = \pm 1$. Допустим, что построены накрывающие преобразования для операторов P_a, соответствующих таким векторам; обозначим через $\gamma(a)$ преобразование, накрывающее отражение P_a. Что можно сказать о зависимости $\gamma(a)$ от вектора a? Построим произведение этого преобразования на себя: $\gamma(a)\gamma(a) = \gamma(a)^2$. Тогда, прежде всего, из (6.10) следует, что $\gamma(a)^2$ должно накрывать I, поскольку накрытие должно быть гомоморфизмом (ср. (5.15)). Если еще предположить, что для полной группы Лоренца, как и для специальной, накрывающие одного и того же преобразования Λ могут различаться только знаком, то должно быть

$$\text{либо } \gamma(a)^2 = 1, \quad \text{либо } \gamma(a)^2 = -1, \tag{6.12}$$

где $\mathbf{1}$ означает единичную матрицу четвертого порядка.

Когда мы ищем аналитическую зависимость $\gamma(a)$ от a, то неестественно ограничиться векторами a, для которых $(a,\ a) = \pm 1$; следует искать выражение $\gamma(a)$ для всех a, но лишь для единичных и антиединичных векторов сохранить требование, чтобы $\gamma(a)$ накрывало P_a. Простейшая зависимость — линейная:

$$\gamma(\lambda a + \mu b) = \lambda\gamma(a) + \mu\gamma(b). \tag{6.13}$$

Для любого неизотропного вектора a имеем $a=\lambda a_0$, где λ — число и $(a_0, a_0)=\pm 1$; из (6.13) и (6.12) следует, что $\gamma(a)^2=\pm(a, a)$. Выберем здесь для определенности знак плюс и будем искать такую линейную зависимость $\gamma(a)$, для которой $\gamma(a)^2=(a, a)$ при всех a. Имеем

$$\gamma(a+b)^2=(\gamma(a)+\gamma(b))^2=$$
$$=\gamma(a)^2+\gamma(a)\gamma(b)+\gamma(b)\gamma(a)+\gamma(b)^2,$$
$$\gamma(a-b)^2=(\gamma(a)-\gamma(b))^2=$$
$$=\gamma(a)^2-\gamma(a)\gamma(b)-\gamma(b)\gamma(a)+\gamma(b)^2.$$

Вычитая, находим

$$\gamma(a)\gamma(b)+\gamma(b)\gamma(a)=$$
$$=\frac{1}{2}\{(a+b,\ a+b)-(a-b,\ a-b)\}=2(a, b). \tag{6.14}$$

Вводя для левой части обозначение $[\gamma(a),\ \gamma(b)]_+$, получаем «антиперестановочные соотношения» для γ-матриц:

$$[\gamma(a),\ \gamma(b)]_+=2(a,\ b). \tag{6.15}$$

В частности, если a, b — векторы псевдоортонормированного базиса (e_α), для матриц

$$\gamma'_\alpha=\gamma(e_\alpha) \tag{6.16}$$

должны быть выполнены соотношения

$$[\gamma'_\alpha,\ \gamma'_\beta]_+=2g_{\alpha\beta}. \tag{6.17}$$

Отсюда видно, как можно построить систему матриц $\gamma(a)$; так как искомая зависимость линейна, достаточно задать четыре матрицы γ'_α, удовлетворяющие соотношениям (6.17), и выразить через них все $\gamma(a)$; тогда будет соблюдаться условие (6.15).

Произвол в построении системы γ-матриц весьма невелик. Если $\tilde{\gamma}(a)$ — другая система матриц, также удовлетворяющая соотношениям (6.15) и линейно зависящая от a, то существует такая (не зависящая от a) матрица W, что

$$\tilde{\gamma}(a)=W\gamma(a)W^{-1} \tag{6.18}$$

для всех a, т. е. обе системы различаются лишь заменой базиса в пространстве биспиноров $\mathbb{C}^4$. При этом матрица

V в (6.18) определяется с точностью до числового множителя[1]).

Вместо матриц γ'_α вводят обычно матрицы $\gamma_\alpha = i\gamma'_\alpha$, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]_+ = -2g_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3); \qquad (6.19)$$

это значит, что $[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]_+ = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\gamma_0^2 = -1$, $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = 1$. (Применение матриц γ_α вместо γ'_α связано с традицией, сложившейся в то время, когда метрическая форма в пространстве Минковского записывалась с обратным знаком: $g_{00} = -1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$.) При замене базиса в $\mathcal{M}$ матрицы $\gamma_\alpha = i\gamma'_\alpha$ преобразуются как ковариантные компоненты вектора. Часто используются и соответствующие контравариантные компоненты, т. е. матрицы

$$\gamma^\alpha = g^{\alpha\beta}\gamma_\beta, \quad \gamma^0 = \gamma_0, \quad \gamma^k = -\gamma_k \qquad (k = 1, 2, 3), \qquad (6.20)$$

удовлетворяющие таким же перестановочным соотношениям

$$[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]_+ = -2g^{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3). \qquad (6.21)$$

Наконец, вводят еще матрицы

$$\gamma_4 = \gamma^4 = -i\gamma_0 \qquad (6.22)$$

и

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \qquad (6.23)$$

для которых

$$[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]_+ = 2\delta_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4), \qquad (6.24)$$

$$[\gamma_\alpha, \gamma_5]_+ = 0 \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3), \quad \gamma_5^2 = 1. \qquad (6.25)$$

Заметим, что матрицы $i\gamma_5\gamma_\alpha$ $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ удовлетворяют соотношениям

$$[i\gamma_5\gamma_\alpha, i\gamma_5\gamma_\beta]_+ = 2g_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3) \qquad (6.26)$$

таким же, как матрицы γ'_α, введенные нами в начале. Именно эти матрицы $i\gamma_5\gamma_\alpha$ и послужат далее для задания

---

[1]) Это предложение иногда называют «фундаментальной теоремой Паули».

преобразований пространства биспиноров, накрывающих отражения относительно координатных осей. Очевидно, такая более сложная запись ($i\gamma_5\gamma_\alpha$ вместо γ'_α) связана лишь с традицией написания γ-матриц.

В дальнейшем мы будем понимать под матрицами γ_α всегда γ_0, γ_1, γ_2, γ_3.

Произведения γ-матриц составляют систему из 16 линейно независимых матриц:

$$\begin{aligned} &1, \\ &\gamma_\alpha, \\ &\gamma_\alpha\gamma_\beta \quad (\alpha<\beta), \\ &\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta \quad (\alpha<\beta<\delta), \\ &\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \end{aligned} \tag{6.27}$$

и, тем самым, *аддитивный базис* всех (комплексных) матриц четвертого порядка [1]). Сами же матрицы γ_α составляют *мультипликативный базис*: это значит, что любая матрица четвертого порядка может быть выражена как полином с комплексными коэффициентами от γ_α (свободный член которого считается кратным единичной матрице).

Конкретная реализация γ-матриц, как уже было сказано, не однозначна и допускает произвол вида (6.18). Если желательно сохранить разделение биспинора на спинор и коспинор (т. е., в координатной форме, не смешивать первые две координаты ψ_α с двумя последними), то берут γ-матрицы в виде

$$\begin{gathered} \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{6.28}$$

---

[1]) Аналогичные системы матриц можно построить во всех пространствах размерности 2^n ($n=1, 2, \ldots$); они порождают так называемые *алгебры Клиффорда*. Например, при $n=1$ имеем матрицы σ_1, σ_2, которые вместе с 1 и $-\sigma_3 = i\sigma_1\sigma_2$ составляют аддитивный базис для всех матриц второго порядка.

или, в более краткой записи

$$\gamma_0=\left(\begin{array}{c|c} 0 & -i\sigma_0 \\ \hline -i\sigma_0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\gamma_k=\left(\begin{array}{c|c} 0 & i\sigma_k \\ \hline -i\sigma_k & 0 \end{array}\right) \quad (k=1,\ 2,\ 3). \qquad (6.29)$$

Ясно, что каждое из преобразований вида (6.29) переводит спинор в коспинор и обратно. Проверка перестановочных соотношений (6.19) не составляет труда. При этом

$$\gamma_5=\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right). \qquad (6.30)$$

В физике имеет важное значение также другой базис в пространстве биспиноров. Произведем замену координат:

$$\begin{aligned} \psi_1'&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1+\psi_3), & \psi_3'&=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\psi_1+\psi_3),\\ \psi_2'&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2+\psi_4), & \psi_4'&=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\psi_2+\psi_4). \end{aligned} \qquad (6.31)$$

Здесь пары $\varphi=(\psi_1,\ \psi_2)$, $\chi=(\psi_3,\ \psi_4)$ преобразуются так же, как декартовы координаты плоскости при повороте на 45°:

$$\varphi'=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi+\chi), \quad \varkappa'=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\varphi+\chi). \qquad (6.32)$$

Однако после преобразования, «смешивающего» спинорные и коспинорные компоненты, φ' и χ' уже не могут быть истолкованы как спинор и коспинор; это просто краткие обозначения для пар координат.

В новом базисе те же преобразования (6.29) изображаются *матрицами Дирака — Паули:*

$$\gamma_0=\left(\begin{array}{c|c} -i & 0 \\ \hline 0 & i \end{array}\right), \quad \gamma_k=\left(\begin{array}{c|c} 0 & i\sigma_k \\ \hline -i\sigma_k & 0 \end{array}\right) \quad (k=1,\ 2,\ 3); \qquad (6.33)$$

при этом

$$\gamma_5=\left(\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 \end{array}\right). \qquad (6.34)$$

(Полученные выражения матриц γ_α отличаются знаком от встречающихся у ряда авторов. У этих авторов метрика пространства Минковского берется в виде $g_{00}=-1$, $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$, что приводит к другому правилу подъема индексов. Матрицы с верхними индексами γ^α, участвующие в уравнении Дирака (см. § 7), у нас получаются те же.)

Две основные формы для биспиноров. Пространства спиноров и коспиноров наделены структурой, состоящей из антисимметрических форм $G(\xi, \eta)$, $\dot{G}(\dot{\xi}, \dot{\eta})$ и связывающего оба пространства антилинейного оператора $\mathbf{C}$. С помощью G, $\dot{G}$ и $\mathbf{C}$ можно определить на пространстве биспиноров $\mathbb{C}^4=\mathbb{C}^2\oplus\dot{\mathbb{C}}^2$ две формы, первая из которых билинейна и антисимметрична, а вторая эрмитова. Именно эта вторая форма играет важную роль в физике, поскольку она служит для построения «вектора тока» Дирака.

Пусть ψ, χ — два биспинора:

$$\psi=\{\xi, \dot{\zeta}\}, \quad \chi=\{\eta, \dot{\vartheta}\}; \tag{6.35}$$

положим

$$G(\psi, \chi)=G(\xi, \eta)-\dot{G}(\dot{\zeta}, \dot{\vartheta}) \tag{6.36}$$

или, в координатах (см. (3.20)),

$$G(\psi, \chi)=-\begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^2 \\ \eta^1 & \eta^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \zeta_{\dot{1}} & \zeta_{\dot{2}} \\ \vartheta_{\dot{1}} & \vartheta_{\dot{2}} \end{vmatrix}= \\ =-\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \chi_1 & \chi_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \psi_3 & \psi_4 \\ \chi_3 & \chi_4 \end{vmatrix}. \tag{6.37}$$

Мы обозначим эту форму снова буквой G, указывающей ее происхождение от форм (3.14). Ясно, что форма $G(\psi, \chi)$ билинейна и антисимметрична относительно перестановки биспиноров:

$$G(\chi, \psi)=-G(\psi, \chi). \tag{6.38}$$

Далее форма G инвариантна относительно группы $SL(2)$, действующей на биспиноры, т. е.

$$G(\hat{u}\psi, \hat{u}\chi)=G(\psi, \chi); \tag{6.39}$$

в самом деле, ввиду (3.30)

$$G(\hat{u}\psi,\ \hat{u}\chi) = G(u\xi,\ u\eta) - \dot{G}(v\dot{\zeta},\ v\dot{\vartheta}) = \\ = G(\xi,\ \eta) - \dot{G}(\zeta,\ \dot{\vartheta}) = G(\psi,\ \chi).$$

Мы имеем антилинейный оператор C, преобразующий спиноры в коспиноры, и оператор C^{-1}, преобразующий коспиноры в спиноры. Построим из них оператор, действующий на биспиноры и обозначаемый также через C («оператор зарядового сопряжения»):

$$\tilde{\psi} = \mathsf{C}(\psi) = \mathsf{C}(\{\xi,\ \dot{\eta}\}) = \{\eta,\ \dot{\xi}\} = \{\mathsf{C}^{-1}\dot{\eta},\ \mathsf{C}\xi\}. \qquad (6.40)$$

Ясно, что C — антилинейный оператор, причем (для биспиноров)

$$\mathsf{C}^2 = I, \quad \mathsf{C}^{-1} = \mathsf{C}. \qquad (6.41)$$

Таким образом, C «переставляет местами» спинор и коспинор в биспиноре ψ. Учитывая принятую нормировку матрицы C (см. (3.19)), можно записать C в «разделенных» (спинорно-коспинорных) координатах:

$$\mathsf{C}(\xi^1,\ \xi^2,\ \eta_{\dot{1}},\ \eta_{\dot{2}}) = (\eta^1,\ \eta^2,\ \xi_{\dot{1}},\ \xi_{\dot{2}}) = \\ = (-\overline{\eta}_{\dot{2}},\ \overline{\eta}_{\dot{1}},\ \overline{\xi}^2,\ -\overline{\xi}^1), \qquad (6.42)$$

или, что то же,

$$\mathsf{C}(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4) = (-\overline{\psi}_4,\ \overline{\psi}_3,\ \overline{\psi}_2,\ -\overline{\psi}_1). \qquad (6.43)$$

Нетрудно проверить, что оператор C перестановочен с операторами $\hat{u}$ биспинорного представления группы $SL(2)$: в силу определения (6.40) и (3.33),

$$\mathsf{C}(\hat{u}\psi) = \mathsf{C}(\{u\xi,\ v\dot{\eta}\}) = \{\mathsf{C}^{-1}(v\dot{\eta}),\ \mathsf{C}(u\xi)\} = \\ = \{(\mathsf{C}^{-1}v\mathsf{C})(\mathsf{C}^{-1}\dot{\eta}),\ (\mathsf{C}u\mathsf{C}^{-1})(\mathsf{C}\xi)\} = \{u\eta,\ v\dot{\xi}\} = \hat{u}(\mathsf{C}\psi).$$

Таким образом,

$$\mathsf{C}\hat{u} = \hat{u}\mathsf{C}. \qquad (6.44)$$

Форма G следующим образом изменяется под действием оператора C:

$$G(\mathsf{C}\psi,\ \mathsf{C}\chi) = -\overline{G(\psi,\ \chi)}; \qquad (6.45)$$

в самом деле, если $\psi=\{\xi, \zeta\}$, $\chi=\{\eta, \vartheta\}$, то в силу (3.15)

$$G(\mathbf{C}\psi, \mathbf{C}\chi)=G(\{\overline{\zeta}, \overline{\xi}\}, \{\overline{\vartheta}, \overline{\eta}\})=G(\overline{\zeta}, \overline{\vartheta})-\dot{G}(\overline{\xi}, \overline{\eta})= \\ =\overline{\dot{G}(\zeta, \vartheta)-G(\xi, \eta)}=-\overline{G(\psi, \chi)}.$$

Введем теперь основную форму B от двух биспиноров:

$$B(\psi, \chi)=G(\mathbf{C}\psi, \chi). \tag{6.46}$$

Легко проверить, что эта форма *эрмитова*, т. е. при перестановке аргументов значение ее заменяется комплексно сопряженным:

$$B(\chi, \psi)=\overline{B(\psi, \chi)}; \tag{6.47}$$

в самом деле, вследствие (6.45), (6.41), (6.38)

$$B(\chi, \psi)=G(\mathbf{C}\chi, \psi)=-\overline{G(\mathbf{C}^2\chi, \mathbf{C}\psi)}= \\ =-\overline{G(\chi, \mathbf{C}\psi)}=\overline{G(\mathbf{C}\psi, \chi)}=\overline{B(\psi, \chi)}.$$

В «разделенных» координатах форма B выражается следующим образом:

$$B(\psi, \chi)=-\begin{vmatrix}(\mathbf{C}\psi)_1 & (\mathbf{C}\psi)_2\\ \chi_1 & \chi_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}(\mathbf{C}\psi)_3 & (\mathbf{C}\psi)_4\\ \chi_3 & \chi_4\end{vmatrix}= \\ =-\begin{vmatrix}-\overline{\psi}_4 & \overline{\psi}_3\\ \chi_1 & \chi_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\overline{\psi}_2 & -\overline{\psi}_1\\ \chi_3 & \chi_4\end{vmatrix}= \\ =\overline{\psi}_1\chi_3+\overline{\psi}_2\chi_4+\overline{\psi}_3\chi_1+\overline{\psi}_4\chi_2. \tag{6.48}$$

Переходя к координатам Дирака—Паули по формулам (6.31), получаем другое выражение формы B, из которого зрмитов характер формы становится вполне очевидным:

$$B(\psi, \chi)=\overline{\psi}_1\chi_1+\overline{\psi}_2\chi_2-\overline{\psi}_3\chi_3-\overline{\psi}_4\chi_4. \tag{6.49}$$

Заметим, что вследствие зрмитовости $B(\psi, \psi)$ действительна при всех ψ; но форма B не положительно определенна, а *индефинитна*, т. е. может иметь любой знак [1]).

---

[1]) Форму B иногда записывают с помощью матрицы γ_0 в виде $B(\psi, \chi)=i\overset{+}{\psi}\gamma_0\chi$, где χ трактуется как матрица-столбец, $\overset{+}{\psi}$ — как матрица-строка $(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \overline{\psi}_3, \overline{\psi}_4)$, а умножение в правой части — как умножение матриц.

Фундаментальное свойство формы B состоит в ее инвариантности по отношению к группе $SL(2)$,

$$B(\hat{u}\psi,\ \hat{u}\chi)=B(\psi,\ \chi), \tag{6.50}$$

что вытекает из инвариантности G (см. (6.39) и (6.44):

$$B(\hat{u}\psi,\ \hat{u}\chi)=G(\mathrm{C}\hat{u}\psi,\ \hat{u}\chi)=\\ =G(\hat{u}\mathrm{C}\psi,\ \hat{u}\chi)=G(\mathrm{C}\psi,\ \chi)=B(\psi,\ \chi).$$

Наконец, по отношению к зарядовому сопряжению оператор B ведет себя следующим образом:

$$B(\mathrm{C}\psi,\ \mathrm{C}\chi)=-B(\chi,\ \psi); \tag{6.51}$$

в самом деле, согласно (6.38),

$$B(\mathrm{C}\psi,\ \mathrm{C}\chi)=G(\mathrm{C}^2\psi,\ \mathrm{C}\chi)=G(\psi,\ \mathrm{C}\chi)=\\ =-G(\mathrm{C}\chi,\ \psi)=-B(\chi,\ \psi).$$

Накрытие отражений. Теперь мы покажем, следуя Ван дер Вардену ([4], § 20), как можно построить двулистное накрытие полной группы Лоренца L. По определению, смешанный спин-тензор S валентности (1, 1) есть билинейная функция от спинора ξ и коспинора $\dot{\eta}$. Теперь мы можем истолковать S как *линейную функцию биспинора*:

$$S(\psi)=S(\xi,\ \dot{\eta}). \tag{6.52}$$

Пользуясь верхними индексами, можно записать эту функцию в виде

$$S=S^{\mu\dot{\nu}}\xi_\mu\eta_{\dot{\nu}}=S^{1\dot{1}}\xi_1\eta_{\dot{1}}+S^{1\dot{2}}\xi_1\eta_{\dot{2}}+S^{2\dot{1}}\xi_2\eta_{\dot{1}}+S^{2\dot{2}}\xi_2\eta_{\dot{2}}=\\ =S^{1\dot{1}}\xi^2\eta_{\dot{1}}+S^{1\dot{2}}\xi^2\eta_{\dot{2}}-S^{2\dot{1}}\xi^1\eta_{\dot{1}}-S^{2\dot{2}}\xi^1\eta_{\dot{2}}. \tag{6.53}$$

Зададим представление группы $SL(2)$ в пространстве спин-тензоров S формулой

$$S'(\xi,\ \dot{\eta})=S(u^{-1}\xi,\ v^{-1}\dot{\eta}); \tag{6.54}$$

здесь под знаком функции выполняются *обратные* преобразования, чтобы преобразования $S\to S'$ умножались в том же порядке, что и преобразования u (ср. определение преобразования полей в § 2). Легко проверить, что компоненты $S^{\mu\dot{\nu}}$ преобразуются при этом по правилу (4.22), так что мы возвращаемся к накрытию специальных преобразований Лоренца (5.13). Однако трактовка спин-тензора ($S^{\mu\nu}$) как функции биспинора ψ позволяет рассмотреть также некоторые преобразования биспиноров, не сводящиеся к *отдельному* преобразованию спиноров в спиноры и коспиноров в коспиноры. Посмотрим, например, как действуют на спин-тензоры S преобразования биспиноров γ_α (которые мы будем записывать в «разделенных» координатах ξ^1, ξ^2, $\eta_{\dot 1}$, $\eta_{\dot 2}$, припяв тем самым для γ-матриц форму (6.29)). Определим, по аналогии с (6.54),

$$S'(\psi)=S(\gamma_\alpha^{-1}\psi).$$

При $\alpha=1, 2, 3, 5$ $\gamma_\alpha^{-1}=\gamma_\alpha$ и $\gamma_0^{-1}=-\gamma_0$; учитывая отождествление координат (6.4)

$$(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)=(\xi^1, \xi^2, \eta_{\dot 1}, \eta_{\dot 2}), \tag{6.55}$$

находим:

$$\begin{aligned}
&\gamma_0(\xi^1, \xi^2, \eta_{\dot 1}, \eta_{\dot 2})=(-i\eta_{\dot 1}, -i\eta_{\dot 2}, -i\xi^1, -i\xi^2),\\
&\gamma_1(\xi^1, \xi^2, \eta_{\dot 1}, \eta_{\dot 2})=(i\eta_{\dot 2}, i\eta_{\dot 1}, -i\xi^2, -i\xi^1),\\
&\gamma_2(\xi^1, \xi^2, \eta_{\dot 1}, \eta_{\dot 2})=(\vartheta_{\dot 2}, -\eta_{\dot 1}, -\xi^2, \xi^1),\\
&\gamma_3(\xi^1, \xi^2, \eta_{\dot 1}, \eta_{\dot 2})=(i\eta_{\dot 1}, -i\eta_{\dot 2}, -i\xi^1, i\xi^2),\\
&\gamma_5(\xi^1, \xi^2, \eta_{\dot 1}, \eta_{\dot 2})=(\xi^1, \xi^2, -\eta_{\dot 1}, -\eta_{\dot 2}).
\end{aligned} \tag{6.56}$$

Вычисляя компоненты преобразованного биспинора

$$S'(\psi)=S(\gamma_\alpha^{-1}\psi)$$

(из (6.53)), имеем соответственно для $\alpha=0, 1, 2, 3, 5$:

$$\begin{array}{llll}
S'^{1\dot 1}=S^{2\dot 2}, & S'^{1\dot 2}=-S^{1\dot 2}, & S'^{2\dot 1}=-S^{2\dot 1}, & S'^{2\dot 2}=S^{1\dot 1};\\
S'^{1\dot 1}=S^{1\dot 1}, & S'^{1\dot 2}=-S^{\dot 2 1}, & S'^{2\dot 1}=-S^{1\dot 2}, & S'^{2\dot 2}=S^{2\dot 2};\\
S'^{1\dot 1}=S^{1\dot 1}, & S'^{1\dot 2}=S^{2\dot 1}, & S'^{2\dot 1}=S^{1\dot 2}, & S'^{2\dot 2}=S^{2\dot 2};\\
S'^{1\dot 1}=S^{2\dot 2}, & S'^{1\dot 2}=S^{1\dot 2}, & S'^{2\dot 1}=S^{2\dot 1}, & S'^{2\dot 2}=S^{1\dot 1};\\
S'^{1\dot 1}=-S^{1\dot 1}, & S'^{1\dot 2}=-S^{1\dot 2}, & S'^{2\dot 1}=-S^{2\dot 1}, & S'^{2\dot 2}=-S^{2\dot 2}.
\end{array} \tag{6.57}$$

Очевидно, при этих преобразованиях эрмитовы матрицы переходят опять в эрмитовы. Из формулы (5.2), связывающей смешанные спин-тензоры с векторами пространства Минковского, видно, что γ_k ($k=1$, 2, 3) накрывают отражения P_{e_k} относительно пространственных осей, γ_0 накрывает «инверсию пространства» $\mathsf{P}=\mathsf{P}_{e_1}\mathsf{P}_{e_2}\mathsf{P}_{e_3}$, наконец, γ_5 накрывает «полное отражение» PT пространства Минковского. Отсюда следует, что $\gamma_5\gamma_0$ накрывает «обращение времени» $\mathsf{T}=\mathsf{P}_{e_0}$.

Таким образом, связь между γ-матрицами и отражениями пространства Минковского, которая и привела нас к γ-матрицам, подтверждается. Приступим теперь к построению двулистного накрытия полной группы Лоренца L. Для этого достаточно присоединить к преобразованиям $\hat{u}$ группы $SL(2)$ «дискретные преобразования», накрывающие P и T, которые мы возьмем в виде

$$\tilde{\mathsf{P}}=\gamma_0, \quad \tilde{\mathsf{T}}=\gamma_5\gamma_0, \tag{6.58}$$

подсказываемом предыдущими выкладками; в самом деле, в силу формул $i\gamma_5\gamma_k=\gamma_0\hat{u}_k$ ($k=1$, 2, 3), где

$$\hat{u}_k=\left(\begin{array}{c|c} -i\sigma_k & 0 \\ \hline 0 & -i\sigma_k \end{array}\right),$$

матрицы $i\gamma_5\gamma_k$ накрывают отражения P_{e_k} и выражаются в виде произведений γ_0 на матрицы $\hat{u}_k$, так что введение отдельных накрывающих преобразований для трех P_{e_k} оказывается излишним. Мы возьмем, таким образом, в качестве преобразований биспиноров, накрывающих P_{e_k},

$$\tilde{\mathsf{P}}_k=i\gamma_5\gamma_k \qquad (k=1,\ 2,\ 3). \tag{6.59}$$

При этом, как легко проверить, операторы $\tilde{\mathsf{P}}_0=\tilde{\mathsf{T}}$, $\tilde{\mathsf{P}}_k$ воспроизводят свойства отражений P_{e_α}:

$$\tilde{\mathsf{P}}_\alpha^2=1, \quad \tilde{\mathsf{P}}_1\tilde{\mathsf{P}}_2\tilde{\mathsf{P}}_3=\tilde{\mathsf{P}} \qquad (\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{6.60}$$

Итак, *мы присоединяем к группе* $SL(2)$, *действующей на биспиноры посредством представления* $\{\hat{u}\}$, *два дискретных оператора* $\tilde{\mathsf{P}}$ *и* $\tilde{\mathsf{T}}$, заданные формулами (6.58)[1]).

[1]) Поскольку $i\gamma_5$ накрывает тождественное преобразование Лоренца, имеется ряд вариантов построения накрытия (см. ниже); матрицы $\tilde{\mathsf{P}}_k=\gamma_k$ были бы неудобны в формальном отношении,

Так как в $SL(2)$ имеется уже матрица -1, в расширенной группе находятся также $-\tilde{\mathsf{P}}$ и $-\tilde{\mathsf{T}}$, и двулистный характер накрытия сохраняется. Отметим для дальнейшего перестановочные соотношения

$$\tilde{\mathsf{P}}\hat{u}=\hat{\bar{u}}^{-1}\tilde{\mathsf{P}},\quad \tilde{\mathsf{T}}\hat{u}=\hat{\bar{u}}^{-1}\tilde{\mathsf{T}},\quad \tilde{\mathsf{P}}\tilde{\mathsf{T}}=-\tilde{\mathsf{T}}\tilde{\mathsf{P}}. \tag{6.61}$$

Обозначим расширенную таким образом группу $SL(2)$ через $\tilde{L}$. С помощью соотношений (6.61) преобразования группы $\tilde{L}$ можно однозначно представить в одном из следующих видов:

$$\hat{u},\quad \tilde{\mathsf{P}}\hat{u},\quad \tilde{\mathsf{T}}\hat{u},\quad \tilde{\mathsf{P}}\tilde{\mathsf{T}}\hat{u}. \tag{6.62}$$

Тем самым $\tilde{L}$ распадается на четыре компоненты связности, каждая из которых двулистно накрывает соответствующую компоненту связности группы Лоренца; обозначим их аналогичными символами в последовательности, заданной выражениями (6.62):

$$\tilde{L}_{+}^{\uparrow},\quad \tilde{L}_{-}^{\uparrow},\quad \tilde{L}_{-}^{\downarrow},\quad \tilde{L}_{+}^{\downarrow}. \tag{6.63}$$

Исследуем теперь, как ведут себя по отношению к дискретным преобразованиям основные формы G и B. Заметим спачала, что преобразования γ_α связаны с обеими формами, легко проверяемыми соотношениями

$$\begin{aligned} &G(\gamma_\alpha\psi,\ \chi)=-G(\psi,\ \gamma_\alpha\chi),\\ &B(\gamma_\alpha\psi,\ \chi)=-B(\psi,\ \gamma_\alpha\chi)\qquad(\alpha=0,\ 1,\ 2,\ 3). \end{aligned} \tag{6.64}$$

Отсюда следуют тождества

$$\begin{aligned} &G(\gamma_k\psi,\ \gamma_k\chi)=-G(\psi,\ \chi),\\ &B(\gamma_k\psi,\ \gamma_k\chi)=-B(\psi,\ \chi)\qquad(k=1,\ 2,\ 3),\\ &G(\gamma_0\psi,\ \gamma_0\chi)=G(\psi,\ \chi),\\ &B(\gamma_0\psi,\ \gamma_0\chi)=B(\psi,\ \chi), \end{aligned} \tag{6.65}$$

и далее

$$\begin{aligned} &B(i\gamma_5\gamma_k\psi,\ i\gamma_5\gamma_k\chi)=B(\psi,\ \chi),\\ &B(\gamma_5\gamma_0\psi,\ \gamma_5\gamma_0\chi)=-B(\psi,\ \chi). \end{aligned} \tag{6.66}$$

так как $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\neq\gamma_0$, т. е. не было бы соотношения $\tilde{\mathsf{P}}_1\tilde{\mathsf{P}}_2\tilde{\mathsf{P}}_3=\tilde{\mathsf{P}}$, воспроизводящего свойство отражений. Имеются и более существенные основания предпочесть выражения (6.59), связанные с сохранением формы B, о чем также будет речь дальше.

Форма B, как уже было упомянуто, служит для введения дираковского 4-вектора тока. В частности, квадратичная форма

$$B(\psi,\ i\gamma_0\psi)=B(\psi,\ -\gamma_4\psi), \tag{6.67}$$

выражающаяся в координатах Дирака—Паули в виде

$$B(\psi,\ i\gamma_0\psi)=\bar\psi_1\psi_1+\bar\psi_2\psi_2+\bar\psi_3\psi_3+\bar\psi_4\psi_4, \tag{6.68}$$

положительно определенна и используется для введения плотности заряда. Так как пространственное отражение не меняет зарядов, следует ожидать, что правильно построенные операторы пространственных отражений сохраняют эту форму, что и получается из (6.66): при $\tilde{\mathsf{P}}_k=i\gamma_5\gamma_k$ [1])

$$B(\tilde{\mathsf{P}}_k\psi,\ i\gamma_0\tilde{\mathsf{P}}_k\psi)=B(\psi,\ i\gamma_0\psi). \tag{6.69}$$

Далее

$$B(\tilde{\mathsf{T}}\psi,\ i\gamma_0\tilde{\mathsf{T}}\psi)=B(\psi,\ i\gamma_0\psi) \tag{6.70}$$

(следует, впрочем, заметить, что преобразование спинорных полей, соответствующее обращению времени, включает не только действующий на биспиноры оператор $\tilde{\mathsf{T}}$, но и оператор зарядового сопряжения C, ср. § 20). Оператор C меняет знаки зарядов, откуда и произошло его название. В самом деле, согласно (6.51),

$$B(\mathsf{C}\psi,\ \mathsf{C}\chi)=-B(\chi,\ \psi);$$

легко проверить, что

$$\mathsf{C}\gamma_\alpha=\gamma_\alpha\mathsf{C}, \tag{6.71}$$

откуда

$$B(\mathsf{C}\psi,\ i\gamma_0\mathsf{C}\psi)=B(\mathsf{C}\psi,\ \mathsf{C}(i\gamma_0\psi))=$$
$$=-B(i\gamma_0\psi,\ \psi)=-\overline{B(\psi,\ i\gamma_0\psi)},$$

и из действительности (6.68) следует

$$B(\mathsf{C}\psi,\ i\gamma_0\mathsf{C}\psi)=-B(\psi,\ i\gamma_0\psi). \tag{6.72}$$

---

[1]) Заметим, что операторы $\tilde{\mathsf{P}}_k=\gamma_k$ меняли бы знак формы (6.67), т. е. знаки зарядов. Это и есть главный довод в пользу сделанного выше выбора $\tilde{\mathsf{P}}_k=i\gamma_5\gamma_k$.

Различные определения дискретных операторов. Как уже было отмечено, выбранный выше способ накрытия группы L преобразованиями биспиноров не является единственно возможным. Различные способы построения накрытия классифицируются по их отношению к основным формам. Во всех случаях требуют, чтобы для обращения времени $\tilde{\mathsf{T}}$ было

$$B(\tilde{\mathsf{T}}\psi,\ \tilde{\mathsf{T}}\chi) = -B(\psi,\ \chi).$$

Соответственно этому для любого преобразования $\tilde{\Lambda}$, накрывающего Λ, принимают

$$B(\tilde{\Lambda}\psi,\ \tilde{\Lambda}\chi) = \rho_\Lambda B(\psi,\ \chi), \tag{6.73}$$

где ρ_Λ — временна́я сигнатура Λ, равная 1 или -1 в зависимости от знака Λ_0^0.

По отношению к форме G используются различные виды нормировки, определяемые числами ε_Λ:

$$G(\tilde{\Lambda}\psi,\ \tilde{\Lambda}\chi) = \varepsilon_\Lambda G(\psi,\ \chi). \tag{6.74}$$

В следующей таблице сведены применяемые способы накрытия группы Лоренца (таблица заимствована из [10])[1]. Число σ_Λ означает пространственную сигнатуру Λ, равную $\Lambda_0^0 \cdot \det \Lambda$.

Способ	ε_Λ	$\tilde{\mathsf{P}}_0 = \tilde{\mathsf{T}}$	$\tilde{\mathsf{P}}_k$	$\tilde{\mathsf{P}} = \tilde{\mathsf{P}}_1\tilde{\mathsf{P}}_2\tilde{\mathsf{P}}_3$	$\Sigma = \tilde{\mathsf{P}}\tilde{\mathsf{T}}$
$\mathscr{R}$	ρ_Λ	$\pm\gamma_5\gamma_0$	$\pm i\gamma_5\gamma_k$	$\pm\gamma_0$	$\pm\gamma_5$
$\mathscr{R}'$	1	$\pm i\gamma_5\gamma_0$	$\pm i\gamma_5\gamma_k$	$\pm\gamma_0$	$\pm i\gamma_5$
$\mathscr{R}''$	σ_Λ	$\pm\gamma_5\gamma_0$	$\pm\gamma_5\gamma_k$	$\pm i\gamma_0$	$\pm i\gamma_5$
$\mathscr{R}'''$	$\rho_\Lambda\sigma_\Lambda$	$\pm i\gamma_5\gamma_0$	$\pm\gamma_5\gamma_k$	$\pm i\gamma_0$	$\pm\gamma_5$

(6.75)

[1]) Иногда эти способы связывают со «спинорами четырех родов» или «псевдоспинорами». В действительности речь идет о различных реализациях в пространстве биспиноров группы $SL(2)$, расширенной дискретными операторами до двулистной накрывающей полной группы Лоренца L. Описание накрытия с помощью формы $S(\zeta,\ \dot{\eta})$, приведенное выше, относится к первому из этих способов и должно быть видоизменено в остальных случаях.

Во всех случаях пользуются одним и тем же выражением оператора зарядового сопряжения C, который связан непосредственно со структурой пространства биспиноров, но не со специальными способами построения дискретных преобразований.

Во всем предыдущем изложении мы строили соответствие таким образом, что некоторым преобразованиям биспиноров однозначно сопоставлялись преобразования Лоренца. Тем самым было построено *представление группы $\tilde{L}$ в пространстве Минковского.* В литературе часто встречается другое описание этого соответствия; каждому преобразованию Лоренца Λ сопоставляется пара $\pm\tilde{\Lambda}$ преобразований биспиноров, причем выполнено, с точностью до знака, свойство представления

$$\widetilde{\Lambda_1\Lambda_2} = \pm\tilde{\Lambda}_1\tilde{\Lambda}_2. \tag{6.76}$$

В таких случаях говорят о «двузначных представлениях» группы Лоренца. Предпочтительно, однако, не отклоняться от обычной алгебраической терминологии, в которой все представления группы однозначны. Для этого достаточно *принять за основную группу вместо L ее двулистную накрывающую $\tilde{L}$.* Эта накрывающая группа может быть также описана абстрактно, как группа, порожденная элементами $SL(2)$ и операторами $\tilde{\mathsf{P}}$, $\tilde{\mathsf{T}}$, с соотношениями (6.61). Такое описание $\tilde{L}$ не зависит от ее конкретной реализации преобразованиями биспиноров.

Накрытие группы Пуанкаре. Из проведенного выше построения сразу же получается двулистное накрытие группы Пуанкаре. В самом деле, группа Пуанкаре $\mathscr{P}$ строится из группы Лоренца L и (абелевой) группы сдвигов $\mathscr{T}$ по алгебраическому правилу, легко поддающемуся обобщению: она состоит из пар (a, Λ) с законом умножения (2.4) [1]).

Построим по этому образцу группу $\tilde{\mathscr{P}}$ из группы $\tilde{L}$, накрывающей группу Лоренца, и той же группы сдвигов пространства Минковского $\mathscr{T}$. Элементами группы $\tilde{\mathscr{P}}$

[1]) Группа, построенная таким образом из двух групп, называется в алгебре их «полупрямым произведением».

являются пары $(a, \tilde{\Lambda})$, где a — сдвиг в пространстве Минковского, заданный вектором, как это описано в § 2, а $\tilde{\Lambda}$ — элемент группы $\tilde{L}$. Правило умножения таких пар устанавливается следующим образом:

$$(a, \tilde{\Lambda})(b, \tilde{M}) = (\tilde{\Lambda}b + a, \tilde{\Lambda}\tilde{M}), \tag{6.77}$$

где $\tilde{\Lambda}b$, по определению, есть вектор Λb, в который переходит b под действием преобразования Лоренца Λ, накрываемого $\tilde{\Lambda}$. Ясно, что алгебраические свойства группы $\tilde{\mathscr{P}}$ вполне аналогичны свойствам $\mathscr{P}$; в частности, обратные элементы находятся по правилу, соответствующему (2.5), а единичным элементом является $(0, 1)$, где 1 означает единичную матрицу $\hat{u}$.

Накрытие группы Пуанкаре $\mathscr{P}$ только что построенной группой $\tilde{\mathscr{P}}$ легко получается из накрытия группы Лоренца: каждой паре $(a, \tilde{\Lambda})$ ставится в соответствие пара (a, Λ). Легко видеть, что это соответствие обладает свойством гомоморфизма (ср. (5.15)) и что каждый элемент (a, Λ) группы $\mathscr{P}$ накрывается в точности двумя элементами $(a, \pm\tilde{\Lambda})$ группы $\tilde{\mathscr{P}}$ (здесь в качестве $\tilde{\Lambda}$ взято любое из двух преобразований биспиноров, накрывающих Λ, причем однозначный и непрерывный выбор $\tilde{\Lambda}$ по Λ невозможен!).

Группа $\tilde{\mathscr{P}}$ распадается на компоненты связности

$$\tilde{\mathscr{P}}_+^\uparrow, \quad \tilde{\mathscr{P}}_-^\uparrow, \quad \tilde{\mathscr{P}}_+^\downarrow, \quad \tilde{\mathscr{P}}_-^\downarrow, \tag{6.78}$$

накрывающие соответствующие компоненты группы $\mathscr{P}$; распределение по компонентам пар $(a, \tilde{\Lambda})$ сразу же получается из уже описанного разложения (6.63) группы $\tilde{L}$.

В дальнейшем мы часто будем называть $\tilde{\mathscr{P}}$ просто группой Пуанкаре, но в формулах будем всегда отчетливо различать элементы $\tilde{\Lambda}$ накрывающей группы и накрываемые ими преобразования Лоренца Λ.

§ 7. Простейшие спинорные поля и уравнения

Поля типа (j, j'). Понятие поля было определено в § 2 весьма общим образом (ср. (2.7)): полем называется любая функция в пространстве Минковского $\mathscr{M}$ со значениями в конечномерном (комплексном или действительном) векторном пространстве V. Если выбрать в V базис, то каждое такое поле изображается системой функций

$$\psi(x)=\{\psi_\nu(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)\}. \tag{7.1}$$

При преобразовании $(a,\ \Lambda)$ группы Пуанкаре поле преобразуется по правилу (2.11): под знаком функций ψ_ν аргумент x заменяется на $\Lambda^{-1}(x-a)$, компоненты же подвергаются преобразованию с помощью матрицы $D[\Lambda]$ конечномерного представления группы Лоренца в пространстве V.

Способ преобразования полей является существенной частью их определения. Поскольку размерность пространства V определяет уже число компонент поля, то с логической точки зрения поле можно просто отождествить с представлением группы Пуанкаре специального вида (2.11).

В соответствии с § 6 мы заменим в определении поля группу Пуанкаре ее двулистной накрывающей $\mathscr{P}$ и ограничимся вначале специальной подгруппой $\mathscr{P}_+^\uparrow$, состоящей из пар $(a,\ u)$, где a — вектор сдвига пространства $\mathscr{M}$, а u — матрица группы $SL(2)$. При этом под знаком функций ψ_ν будет производиться преобразование Лоренца Λ, соответствующее u в силу накрытия, т. е. в нижеследующей (7.2) и во всех аналогичных формулах предполагается, что u и Λ связаны накрытием $\Lambda=h(u)$:

$$\psi'_\mu(x)=\sum_\nu D_{\mu\nu}[u]\,\psi_\nu(\Lambda^{-1}(x-a)). \tag{7.2}$$

Если представление $D[u]$ приводимо, то пространство V разлагается в прямую сумму неприводимых подпространств, т. е. можно выбрать в V такой базис, что все матрицы $D[u]$ принимают одновременно «ящичный» вид (ср. определение приводимости в § 4, (4.23)). Тогда поле $\psi(x)$ сводится к некоторому числу полей, соответствующих полученным неприводимым представлениям $SL(2)$; каждое из них преобразуется независимо от остальных, и можно считать $\psi(x)$ набором полей более простого строения с меньшим числом компонент. Отсюда ясно, что преимущественного внимания заслуживают поля, отвечающие *неприводимым* представлениям $D[u]$. Такие представления подробно изучаются дальше, в § 9. Чтобы не откладывать примеры полей, мы будем пользоваться в данном параграфе некоторыми готовыми результатами из § 9. Каждое неприводимое представление группы $SL(2)$ может быть построено с помощью спин-тензоров некоторой валентности (r, s), как это описано в § 4. В пространстве таких спин-тензоров выделяется инвариантное подпространство, состоящее из спин-тензоров

$$S^{\nu_1\ldots\nu_r}_{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_s}, \tag{7.3}$$

симметрических как по «непунктированным» индексам $\nu_1, \ldots, \nu_r$, так и по «пунктированным» индексам $\dot\mu_1, \ldots, \dot\mu_s$. Представление группы $SL(2)$ такими спин-тензорами *неприводимо* и обозначается символом $D^{(j, j')}$, где $2j=r$, $2j'=s$ и числа j, j', следовательно, целые или полуцелые. Этот выбор обозначений связан со спином и будет мотивирован в дальнейшем. Пока же числа j, j' вполне заменяют r, s, указывая, таким образом, валентность спин-тензоров представления (7.3). Пусть бинарным матрицам u соответствуют в этом представлении матрицы $D^{(j, j')}[u]$. Тогда формула (7.2) задает, по определению, *поле типа* (j, j'). Все поля сводятся, таким образом, к полям этого рода, математическое описание которых требует знания матриц представлений $D^{(j, j')}$. Матрицы $D^{(j, j')}[u]$ будут найдены в § 9. Размерность этого представления, т. е. размерность пространства спин-тензоров только что описанного типа (7.3), выражается через j, j' (см. § 9):

$$\dim D^{(j, j')} = (2j+1)(2j'+1). \tag{7.4}$$

Поля типа (j, o). Проще всего поля типов $(j, 0)$, $(0, j')$. Поскольку последние вполне аналогичны первым, с заменой «спинорной» валентности на «коспинорную», достаточно рассмотреть случай $(j, 0)$. Матрицы неприводимого представления записываются в этом случае [в виде $D^{(j)}[u]$ вместо $D^{(j, 0)}[u]$; это матрицы порядка $2j+1$. В частности, когда u пробегает все унитарные матрицы r, представление $D^{(j)}$ сужается до представления группы $SU(2)$, которое мы обозначим через $R^{(j)}[r]$. Это представление также неприводимо. (Заметим, что сужение *общих* представлений $D^{(j,\,j')}$ до группы $SU(2)$ дает *приводимые* представления).

Итак, поле типа $(j,\ 0)$ преобразуется по формуле

$$\psi_\mu(x)=\sum_{\nu=-j}^{j} D^{(j)}_{\mu\nu}[u]\,\psi_\nu(\Lambda^{-1}(x-a)). \tag{7.5}$$

Простейшим примером такого поля является скалярное поле Паули—Вайскопфа, с $j=0$. В этом случае представление $D^{(0)}\,[u]$ оказывается тривиальным, т. е. всем матрицам u соответствует число 1; поле имеет одну компоненту, и преобразование в (7.5) сводится к замене переменной под знаком $\psi(x)$. При помощи такого поля описываются *скалярные мезоны*.

Следующий пример — «нейтринное» (и «антинейтринное») поле Вейля, с $j=1/2$. Если взять «фундаментальное» представление $D^{(1/2)}[u]=u$, то (7.5) задает закон преобразования поля, связываемого с *антинейтрино*. Сопряженному представлению $D^{(0,\,1/2)}[u]=\bar{u}^{-1}$ соответствует поле, описывающее *нейтрино*. Каждое из этих полей имеет две компоненты.

Напомним, что мы пока ограничились подгруппой $\mathscr{P}_+^\uparrow$ группы Пуанкаре, исключив тем самым пространственные отражения. Такое определение полей пригодно лишь для тех случаев, когда подлежащее описанию поле не может быть подвергнуто преобразованию пространственного отражения (говорят, что для такого поля «не сохраняется четность»). Для описания полей, допускающих пространственное отражение, надо перейти к представлениям полной группы Пуанкаре $\tilde{\mathscr{P}}$.

Для построения поля типа $(j,\ 0)$ используется неприводимое представление $D^{(j)}\,[u]$ группы $SL(2)$; отсюда, однако, не следует, что задающее поле бесконечномерное представление группы Пуанкаре (ср. § 2) также неприводимо. В самом деле, выделение инвариантного подпространства этого представления означает наложение некоторых линейных соотношений на поля данного типа; однако такие соотношения могут включать не только линейные комбинации компонент поля (с помощью которых выделяются инвариантные подпространства группы $SL(2)$), но также линейные операторы, действующие на отдельные компоненты, как на функции от x. В простейшем случае это *дифференциальные* операторы. Ограничение дифференциальными операторами и уравнениями означает, что на поле накладываются условия локального характера: соблюдение этих условий в данной точке пространства-времени не нарушается, если изменить поле вне сколь угодно малой окрестности этой точки. Такой характер полей важен в динамике; по этой причине поля определенного выше рода иногда называют «локальными полями».

Поскольку мы хотим построить дифференциальные уравнения, выделяющие инвариантные подпространства полей, эти уравнения должны быть инвариантны относительно группы Пуанкаре и относительно замены базиса в пространстве Минковского и в спинорном пространстве; мы назовем уравнения такого рода просто *инвариантными*. Простейшие способы построения таких уравнений подсказываются аппаратом спинорной алгебры. Соответствующие дифференциальные операторы должны содержать дифференцирования по x^0, x^1, x^2, x^3, т. е. выражаться через операторы $\partial/\partial x^\alpha$, преобразующиеся как ковариантные компоненты 4-вектора. Как мы уже знаем, в спинорной алгебре 4-вектор задается смешанным спин-тензором валентности (1, 1). Выразим компоненты этого спин-тензора через $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$, учитывая ковариантный характер последних (ср. (5.2), (5.5)); полученный спин-тензор запишем в двух видах:

$$(\partial^{\mu\dot{\nu}}) = \begin{pmatrix} \partial_0 + \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & \partial_0 - \partial_3 \end{pmatrix}, \tag{7.6}$$

$$(\partial_{\mu\dot{\nu}}) = \begin{pmatrix} \partial_0 - \partial_3 & -\partial_1 - i\partial_2 \\ -\partial_1 + i\partial_2 & \partial_0 + \partial_3 \end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

Наложение линейных соотношений на спин-тензорное поле можно выполнить инвариантным образом, свернув этот спин-тензор с одним или несколькими операторами вида (7.6), (7.7) по определенным индексам. Как мы увидим, этот метод весьма эффективен при построении неприводимых представлений группы Пуанкаре. Чаще всего используются уравнения первого порядка, содержащие одно свертывание только что указанного типа, и уравнения второго порядка, построенные с помощью «скалярного» дифференциального оператора

$$\frac{1}{2}\,\partial_{\mu\dot{\nu}}\partial^{\mu\dot{\nu}} = \partial_0^2 - (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2) = -\Box \tag{7.8}$$

(см. (5.10), где надо подставить вместо x «вектор-оператор» $\partial/\partial x^\alpha$). $\Box$ означает здесь известный в математической физике оператор Даламбера, имеющий, таким образом, «спинорное разложение» (7.8).

Линейные дифференциальные уравнения, выделяющие в пространстве полей данного типа неприводимое представление группы Пуанкаре, называются «уравнениями движения» для данного типа поля (имеется в виду «свободное поле», т. е. не взаимодействующее с другими полями). Как мы увидим, на этом пути естественно возникают известные уравнения Вейля, Дирака и Максвелла. Тем самым значительная часть содержания физики, исторически сложившаяся в рамках динамики, может быть включена в групповое описание полей. Поскольку описание взаимодействий включает поля того же типа, что и «свободные» (превращающиеся в свободные поля при $t \to \pm\infty$), можно рассматривать групповое описание полей как их «кинематику», составляющую естественную предпосылку любых динамических теорий.

Поля типа $(j, 0) \oplus (0, j)$. Поля, допускающие пространственное отражение, определяются с помощью представлений *полной* группы Пуанкаре $\tilde{\mathscr{P}}$. Для построения таких представлений переходят к «удвоенным» представлениям группы $SL(2)$, по аналогии с ее биспинорным представлением, и задают в полученном пространстве представление расширенной дискретными преобразованиями группы $\tilde{L}$. Обозначим через V пространство представления $D^{(j)}$; векторы ϕ этого пространства играют в дальнейшем построении роль, аналогичную спинорам. Введем другой экземпляр комплексного векторного пространства той же размерности $2j+1$, который обозначим через $\dot{V}$. Пространства V, $\dot{V}$ называются *дуальными*, если для каждого вектора φ из V и каждого вектора χ из $\dot{V}$ определено скалярное произведение $(\chi|\varphi)$, обладающее такими же свойствами, как скалярное произведение спиноров и коспиноров (ср. (3.7)). Векторы дуального пространства $\dot{V}$ мы будем называть *ковекторами* (по отношению к дуальности пространств и в отличие от векторов V).

Далее, по аналогии с биспинорами, рассмотрим «бивекторы» $\{\varphi, \chi\}$, составляющие пространство $V\oplus\dot{V}$, аналогичное пространству $\mathbb{C}^2\oplus\dot{\mathbb{C}}^2$ (ср. (6.1)); мы берем в кавычки слово «бивектор», поскольку соответствующий термин имеет в геометрии другое значение, мы же не хотим от него отказываться ввиду тесной аналогии с дираковскими биспинорами). В случае $j=1/2$ мы возвращаемся к пространству биспиноров.

Базису (ε_μ) $(\mu=-j, \ldots, j)$ пространства V соответствует, как можно показать, дуальный базис (ε^ν) пространства $\dot{V}$, связанный с ним соотношениями $(\varepsilon^\nu|\varepsilon_\mu)=\delta^\nu_\mu$. При этом скалярное произведение вектора $\varphi=\varphi^\mu\varepsilon_\mu$ и ковектора $\chi=\chi_\nu\varepsilon^\nu$ задается обычной формулой

$$(\chi|\varphi)=\bar{\chi}_\mu\varphi^\mu. \tag{7.9}$$

Поскольку V является пространством представления $D^{(j)}=D^{(j,0)}$, его размерность, согласно (7.4), равна $2j+1$; следовательно, размерность $\dot{V}$ также равна $2j+1$, и $\dot{V}$ можно взять в качестве пространства представления $D^{(0,j)}$. Мы будем относить матрицы $D^{(j,0)}[u]$ к базису (ε_μ), а матрицы $D^{(0,j)}[u]$ — к дуальному базису (ε^ν). Оказывается, эти представления сопряжены относительно дуальности $(|)$ точно так же, как $\{u\}$ и $\{\tilde{u}^{-1}\}$ в § 3 (см. (9.36)):

$$(D^{(0,j)}[u]\chi\,|\,D^{(j,0)}[u]\varphi)=(\chi|\varphi). \tag{7.10}$$

В частности, при $j=1/2$ мы возвращаемся к (3.42).

Аналогия между «бивекторами» $\{\varphi, \chi\}$ и биспинорами $\{\xi, \dot{\eta}\}$, составляющими их частный случай, продолжается антилинейным оператором $\mathbf{C}$, переводящим векторы в ковекторы и связывающим представления $(j, 0)$ и $(0, j)$; этот оператор задается в дуальных базисах формулами

$$\mathbf{C}\varepsilon_\mu = C_{\nu\mu}\varepsilon^\nu, \quad \chi_\nu = C_{\nu\mu}\overline{\varphi}^\mu, \tag{7.11}$$

и с помощью матрицы C в § 9 получается соотношение

$$D^{(0, j)}[u] = C\overline{D^{(j,0)}[u]}\,C^{-1}, \tag{7.12}$$

(см. (9.35)), частным случаем которого при $j = {}^1/_2$ является (3.35). В случае биспиноров оператор $\mathbf{C}$ был непосредственно связан с антисимметрической метрикой в пространствах $\mathbb{C}^2$, $\dot{\mathbb{C}}^2$ и входил в основную структуру пространства биспиноров; в общем случае он может быть получен из оператора § 3 методами теории представлений. Если матрицу C для спиноров взять в виде (3.19), то матрица C при любом j оказывается вещественной и

$$C^2 = (-1)^{2j} \tag{7.13}$$

(см. (9.48)).

Часто бывает полезен другой базис в пространстве $\overset{*}{V}$, не дуальный по отношению к (ε_μ), а связанный с дуальным при помощи той же матрицы C:

$$\overset{*}{\varepsilon}{}^\nu = C_{\varkappa\nu}\varepsilon^\varkappa. \tag{7.14}$$

Как и в § 3, мы назовем этот базис сопряженным по отношению к (ε_μ). Тогда, как видно из (7.12), матрицы представлений $D^{(j,0)}$, $D^{(0,j)}$, записанные в базисах (ε_μ), $(\overset{*}{\varepsilon}{}^\nu)$, связаны простыми соотношениями, частным случаем которых является (3.41):

$$D^{(0, j)}[u] = \overline{D^{(j,0)}[u]}. \tag{7.15}$$

Представление, стоящее в правой части (7.15), в силу (7.12) эквивалентно представлению $D^{(0, j)}$, рассмотренному выше.

Как мы видели в § 6, можно отождествить группу $SL(2)$ с группой $\{\hat{u}\}$ преобразований биспиноров, имеющих в дуальных базисах матрицы (6.7). Точно так же каждой бинарной матрице u можно поставить в соответствие преобразование «бивекторов», описываемое в дуальных базисах матрицей порядка $2(2j+1)$:

$$D^{(j)}[\hat{u}]=\left[\begin{array}{c|c} D^{(j,0)}[u] & 0 \\ \hline 0 & D^{(0,j)}[u] \end{array}\right]. \tag{7.16}$$

Построим далее матрицы, соответствующие пространственному отражению и обращению времени по образцу преобразований биспиноров γ_0, $\gamma_5\gamma_0$ (см. (6.29),(6.30)):

$$\begin{aligned} P^{(j)} &= D^{(j)}[P]=\eta_P\left[\begin{array}{c|c} 0 & -i \\ \hline -i & 0 \end{array}\right], \\ T^{(j)} &= D^{(j)}[T]=\eta_T\left[\begin{array}{c|c} 0 & -i \\ \hline i & 0 \end{array}\right], \end{aligned} \tag{7.17}$$

где блоки представляют собой матрицы порядка $2j+1$, а числа η_P, η_T могут быть выбраны различным образом для разных полей. Как видно из (9.35), (9.41), $D^{(0,j)}[u]=D^{(j,0)}[\dot{u}^{-1}]=(D^{(j,0)}[u])^{+-1}$; поэтому матрицы (7.16), (7.17) удовлетворяют соотношениям, аналогичным (6.61). Тем самым матрицы $D[\tilde{\Lambda}]$ образуют $2(2j+1)$-мерное представление группы $\tilde{L}$.

Теперь можно построить представление полной группы Пуанкаре $\tilde{\mathscr{P}}$ в пространстве $2(2j+1)$-компонентных полей $\varphi=\{\phi, \chi\}$. Нумеруя все компоненты φ подряд, в последовательности $(\phi_{-j}, \ldots, \phi_j, \chi_{-j}, \ldots, \chi_j)$, положим

$$\varphi'_\mu(x)=\sum_\nu D^{(j)}_{\mu\nu}[\tilde{\Lambda}]\,\varphi_\nu(\Lambda^{-1}(x-a)). \tag{7.18}$$

В некоторых случаях удобно перейти в пространстве $\check{V}$ к сопряженному базису по формуле (7.14). В этом базисе $D^{(0,j)}[u]$, входящие в (7.16), принимают вид $\overline{D^{(j,0)}[u]}$. Что касается матриц $P^{(j)}$, $T^{(j)}$, то их можно по-прежнему взять в виде (7.17). Легко проверить, что полученное представление группы $\tilde{L}$ (и тем самым группы $\tilde{\mathscr{P}}$) эквивалентно предыдущему.

До сих пор мы задавали поля с помощью *комплексных* представлений группы Пуанкаре $\mathscr{P}$, т. е. представлений в комплексных векторных пространствах. Существуют также поля, определяемые *действительными* представлениями; такие поля называются *действительными*. Простой способ их построения состоит в наложении некоторого линейного уравнения, выделяющего из комплексного пространства полей некоторое действительное подпространство, т. е. подмножество, содержащее вместе с двумя полями их сумму и вместе с каждым полем все его действительные кратные. В пространстве полей $\varphi=\{\psi, \chi\}$ такую роль играет условие Майорана

$$\chi(x)=\mathbf{C}\psi(x). \tag{7.19}$$

Ввиду антилинейности оператора $\mathbf{C}$ пространство полей, удовлетворяющих (7.19), инвариантно относительно умножения на действительные (но не на комплексные) числа. Пользуясь (7.13), можно подобрать такие множители η_P, η_T в (7.17), чтобы дискретные преобразования $P^{(j)}$, $T^{(j)}$ не нарушали условия Майорана. Тогда пространство полей, удовлетворяющих (7.19), образует представление полной группы Пуанкаре $\tilde{\mathscr{P}}$. Тем самым задается *действительное поле*.

Перейдя к сопряженному базису в $\dot{V}$, можно представить условие (7.19) в виде

$$\chi_\mu(x)=\overline{\psi_\mu(x)}, \quad \mu=-j, -j+1, \ldots, j-1, j. \tag{7.20}$$

Отсюда видно, что действительное поле (ψ, χ) содержит $2j+1$ независимых комплексных компонент и, следовательно, $2(2j+1)$ действительных, которые находятся из соотношений

$$\psi_\mu=\mathscr{E}_\mu-i\mathscr{H}_\mu, \quad \chi_\mu=\mathscr{E}_\mu+i\mathscr{H}_\mu. \tag{7.21}$$

Как будет показано во второй части книги, каждому типу классического поля соответствует квантованное поле, преобразующееся по аналогичному закону. С каждым квантованным полем связаны его кванты — частица и античастица, которые в отдельных случаях могут совпадать (их называют тогда «истинно нейтральными частицами»). Только что описанным «действительным» полям соответствуют как раз квантованные поля, кванты которых «истинно нейтральны».

Уравнения для скалярных полей. Поле типа (0, 0), т. е. скалярное поле, однокомпонентно. Инвариантные уравнения, которым оно может удовлетворять, строятся с помощью оператора Даламбера (7.8), также имеющего, как мы видели, естественную спинорную запись. Известный квантовомеханический принцип соответствия

$$p^k \to \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^k} \quad (k=1,\ 2,\ 3), \qquad p^0 \to -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x^0} \tag{7.22}$$

связывает оператор Даламбера с основным релятивистским соотношением между энергией, импульсом и массой

$$E^2 - p^2 = m^2 \qquad (c=1). \tag{7.23}$$

Соответственно этому можно наложить на скалярное поле уравнение Клейна—Гордона (в котором мы принимаем $\hbar=1$)

$$(\Box - m^2)\psi = 0, \tag{7.24}$$

где $\Box = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 - \partial_0^2$, $m > 0$. Можно показать, что скалярные поля, удовлетворяющие этому уравнению, образуют неприводимое представление группы Пуанкаре $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Паули и Вайскопф предложили такие поля для описания «скалярных мезонов», которым приписывается, таким образом, масса m.

Другой вариант уравнения для скалярных полей получается при $m=0$. В этом случае поле должно удовлетворять уравнению Даламбера

$$\Box\psi = 0, \tag{7.25}$$

а соответствующим частицам приписывается нулевая масса. «Скалярные» частицы нулевой массы до сих пор в природе не обнаружены.

Уравнение Вейля. Поле типа ($^1/_2$, 0) имеет вид

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \tag{7.26}$$

и преобразуется по правилу (7.2) с «фундаментальным» представлением $D^{(1/2)}[u]=u$; иначе говоря, для преобразования компонент поля служат сами матрицы группы $SL(2)$:

$$\begin{aligned} \psi_1'(x) &= u_1^1\psi_1(\Lambda^{-1}(x-a)) + u_2^1\psi_2(\Lambda^{-1}(x-a)), \\ \psi_2'(x) &= u_1^2\psi_1(\Lambda^{-1}(x-a)) + u_2^2\psi_2(\Lambda^{-1}(x-a)). \end{aligned} \tag{7.27}$$

Поле типа $(0, {}^1/_2)$ имеет тот же вид (7.26), но преобразуется по сопряженному представлению, т. е. в (7.27) надо заменить матрицу u на $v=\tilde{u}^{-1}$. Чтобы подчеркнуть природу обоих полей, мы будем обозначать компоненты первого (спинорного) поля через ξ^1, ξ^2, а компоненты второго (коспинорного) через $\eta_{\dot 1}$, $\eta_{\dot 2}$. Преобразования указанных полей ограничиваются группой $\mathscr{P}_+^\uparrow$; они не допускают ни пространственного отражения, ни обращения времени по самому своему определению, поскольку в определение поля входит группа, представления которой задают поле, а в случае нейтринного поля за такую группу принимается специальная подгруппа $\mathscr{P}_+^\uparrow$ группы Пуанкаре. Конечно, такой формальный подход позволяет лишь получить сведения о возможных полях и их свойствах; сопоставление же этих возможностей с опытом предполагает, что из опыта известны некоторые свойства существующих в природе полей (или, что то же, частиц, являющихся их квантами). В случае нейтрино известно, что проекция момента этой частицы на направление ее движения имеет всегда определенный знак, связанный с «сортом» частицы (нейтрино или антинейтрино), о чем будет речь в части второй. Между тем, поле, допускающее пространственное отражение, может существовать, как мы увидим, в состояниях с противоположными знаками этой проекции. Следовательно, поле, связанное с определенным «сортом» нейтрино, может преобразовываться лишь по представлениям группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$, не содержащей пространственных отражений [1]).

---

[1]) Тем самым исключается и обращение времени, также требующее «удвоения» представления с помощью биспиноров. Мы не будем дальше углубляться в этот вопрос.

Как было сказано, инвариантные подпространства выделяются в пространствах полей с помощью линейных дифференциальных уравнений, не изменяющих вида при замене базиса в пространстве полей и инвариантных по отношению к преобразованиям задающего поле представления. Такие инвариантные уравнения для спинорных и коспинорных полей естественно искать в виде сверток

$$\partial^{\mu\dot{\nu}}\eta_{\dot{\nu}} = 0, \quad \partial_{\mu\dot{\nu}}\xi^{\mu} = 0, \tag{7.28}$$

где $\partial^{\mu\dot{\nu}}$, $\partial_{\mu\dot{\nu}}$ — дифференциальные операторы (7.6), (7.7). Это и есть *уравнения Вейля* для нейтринного и антинейтринного поля.

То обстоятельство, что первое из них связывается с нейтрино, а второе — с антинейтрино, объясняется лишь исторически сложившимися названиями этих частиц: первое из этих уравнений соответствует частице со спином, противоположным импульсу, а второе — частице со спином, направленным одинаково с импульсом, первая из частиц была (совершенно произвольно) названа нейтрино, а вторая — антинейтрино. Инвариантность уравнений (7.28) по отношению к группе $\mathscr{P}_+^\uparrow$ прямо следует из свойств преобразования спиноров, коспиноров и спин-тензоров (§ 4); в таких случаях говорят, что уравнения «релятивистски инвариантны по своей форме». По той же причине уравнения (7.28) имеют одинаковый вид в любых (дуальных) базисах спинорного и коспинорного пространств. Итак, уравнения Вейля инвариантны в указанном выше смысле.

Пользуясь выражениями (5.8), (5.9), можно записать операторы (7.28) через σ-матрицы:

$$(\partial^{\mu\dot{\nu}}) = \partial_0 + \partial_1\sigma_1 + \partial_2\sigma_2 + \partial_3\sigma_3, \tag{7.29}$$

$$(\partial_{\mu\dot{\nu}}) = \partial_0 - \partial_1\sigma_1^T - \partial_2\sigma_2^T - \partial_3\sigma_3^T. \tag{7.30}$$

Примем во внимание, что во втором уравнении (7.28) суммирование производится по первому индексу, т. е. используется *транспонированная матрица* $\partial_{\mu\dot{\nu}}$; тогда, введя матрицы $\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0$, $\tilde{\sigma}_k = -\sigma_k$ $(k = 1, 2, 3)$ и подняв индексы σ-матриц по обычному правилу для 4-векторов, можно выразить уравнения Вейля в следующем виде:

$$\tilde{\sigma}^{\alpha}\partial_{\alpha}\dot{\eta}=0, \quad \sigma^{\alpha}\partial_{\alpha}\xi=0. \tag{7.31}$$

Уравнение Дирака. Рассмотрим теперь поле типа $(1/2, 0)\oplus(0, 1/2)$, т. е. *биспинорное поле*, возникающее из представления полной группы Пуанкаре $\tilde{\mathscr{P}}$ типа $(1/2, 0)\oplus(0, 1/2)$:

$$\psi(x)=\begin{pmatrix}\xi^1(x)\\ \xi^2(x)\\ \eta_{\dot{1}}(x)\\ \eta_{\dot{2}}(x)\end{pmatrix}. \tag{7.32}$$

Инвариантные уравнения должны теперь связывать спинор с коспинором. Такие уравнения проще всего составить с помощью «спин-тензорных операторов» $\partial^{\mu\dot{s}}$, $\partial_{\mu\dot{s}}$:

$$\partial^{\mu\dot{s}}\eta_{\dot{s}}=k_1\xi^{\mu}, \quad \partial_{\mu\dot{s}}\xi^{\mu}=k_2\eta_{\dot{s}},$$

где k_1, k_2 путем умножения ξ и $\dot{\eta}$ на подходящие постоянные могут быть сделаны равными:

$$\partial^{\mu\dot{s}}\eta_{\dot{s}}=k\xi^{\mu}, \quad \partial_{\mu\dot{s}}\xi^{\mu}=k\eta_{\dot{s}}. \tag{7.33}$$

Отсюда вытекает

$$(\partial^{\mu\dot{s}}\partial_{\lambda\dot{s}}-k^2\delta^{\mu}_{\lambda})\,\xi^{\lambda}=0, \quad (\partial_{\mu\dot{s}}\partial^{\mu\dot{\lambda}}-k^2\delta^{\dot{\lambda}}_{\dot{s}})\,\eta_{\dot{\lambda}}=0;$$

применив (5.10) к спин-тензорам $\partial^{\mu\dot{s}}$, $\partial_{\mu\dot{s}}$, имеем

$$\{(\partial_0^2-\partial_1^2-\partial_2^2-\partial_3^2)-k^2\}\,\xi^{\lambda}=0$$

и аналогичное уравнение для $\eta_{\dot{\lambda}}$. Для определения коэффициента k нам придется прибегнуть к простым физическим соображениям.

Это уравнение обращается в уравнение Клейна—Гордона (7.24), если взять число k чисто мнимым: $k=\pm im$. Ввиду связи между уравнением Клейна—Гордона и основным релятивистским соотношением (7.23) число m следует отождествить с массой некоторой частицы, связанной с полем. Мы вернемся к этому во второй части книги. Наконец, для частицы в состоянии покоя собственные значения операторов p_k ($k=1, 2, 3$) должны быть равны нулю, а собственное значение энергии $p_0=i\partial_0$ положительно. Решение можно взять в виде плоской волны $\xi=e^{i\omega t}$, $\hat{\eta}=e^{i\omega t}$, и из выражения (7.6) видно, что следует положить $k=-im$. Из этих эвристических соображений выясняется окончательный вид уравнений (7.33)

$$\partial^{\mu\dot{\nu}}\eta_{\dot{\nu}}+im\xi^{\mu}=0, \quad \partial_{\mu\dot{\nu}}\xi^{\mu}+im\eta_{\dot{\nu}}=0. \tag{7.34}$$

Это *уравнение Дирака в спинорном виде*. Пользуясь выражениями (7.6), (7.7), можно свести (7.34) к четырехкомпонентному уравнению

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & \partial_0+\partial\sigma \\ \hline \partial_0-\partial\sigma & 0 \end{array}\right]\begin{pmatrix}\xi\\ \hat{\eta}\end{pmatrix}=-im\begin{pmatrix}\xi\\ \hat{\eta}\end{pmatrix}, \tag{7.35}$$

где $\partial\sigma=\partial_1\sigma_1+\partial_2\sigma_2+\partial_3\sigma_3$ (при этом следует помнить, что ξ преобразуется с помощью *транспонированной* матрицы $\partial_{\mu\dot{\nu}}$!). Умножив еще обе части уравнения на $-i$ и обозначив ξ^1, ξ^2, $\eta_{\dot{1}}$, $\eta_{\dot{2}}$ в указанной последовательности через ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 (ср. (6.55)), получаем уравнение Дирака в первоначальном виде

$$\gamma^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi+m\psi=0, \tag{7.36}$$

где γ^{α} получаются поднятием индекса из матриц (6.29).

Заметим, что эти уравнения относятся к «разделенному» базису, в котором первые две компоненты ψ_{μ} относятся к спинору, а последние две — к коспинору. С точки зрения теории представлений группы Пуанкаре эта запись наиболее естественна (ср. законы преобразования (7.16), (7.17)). С другой стороны, если перейти к базису Дирака—Паули, в котором γ-матрицы принимают вид (6.33), то в нерелятивистском пределе сохраняется лишь первая пара компонент биспинора, вторая же стремится к нулю. В этом и состоит практическое значение базиса Дирака—Паули. Отсюда ясно также, что в нерелятивистском пределе спинор ξ и коспинор $\hat{\eta}$ описывается совпадающими компонентами. Это согласуется с тем, что для матриц r, накрывающих вращения, $\check{r}^{-1}=r$, и тем самым спиноры и коспиноры преобразуются одинаково.

Следует заметить, что видимая простота уравнения (7.36) связана с сокращенной записью γ-матриц, выбор которых имел довольно сложную физическую мотивировку и не определяется каким-либо однозначным формализмом; и в самом деле, γ-матрицы могут быть выбраны разными способами, ни один из которых не имеет принципиальных преимуществ перед другими, что приводит к равносильным уравнениям. Между тем, уравнения Дирака в спинорной форме (7.34) почти однозначно подсказываются спинорной алгеброй, и остается лишь выбрать значение некоторой постоянной. Это заставляет думать, что именно спинорная запись наиболее адекватна уравнению Дирака, так что разложение биспинора на спинорную и коспинорную части, столь отчетливо возникающее из теории представлений, должно иметь глубокий физический смысл.

Инвариантность уравнений Дирака (7.34) по отношению к группе $SL(2)$ прямо видна из формы этих уравнений (ср. соответствующие замечания о нейтринных полях). Точно так же легко проверяется, что уравнения (7.34) инвариантны по отношению к дискретным преобразованиям $\tilde{\mathsf{P}}$ и $\tilde{\mathsf{T}}$, заданным формулами (7.17). Наконец, ясно, что вид этих уравнений не зависит от выбора (дуальных) базисов в пространствах спиноров и коспиноров. Что касается первоначальной формы уравнения Дирака (7.36), то здесь вид γ-матрицы зависит от базиса, выбранного для биспиноров, как это уже обсуждалось в § 6.

Как мы увидим дальше, с биспинорным полем $\psi(x)$ связаны кванты этого поля — электроны и позитроны, являющиеся античастицами по отношению друг к другу. По этой причине биспинорное поле называется *электронно-позитронным полем*.

При наличии внешнего электромагнитного поля уравнение Дирака меняет свой вид; покажем, как записывается соответствующее уравнение в спинорной форме. Предполагается, что внешнее поле достаточно сильно, чтобы можно было не учитывать обратное воздействие на него электронно-позитронного, и что оно (феноменологически) описывается вектор-потенциалом $A^\alpha(x)$.

Заметим сначала, что импульс частицы (p_α) есть вектор-оператор, ковариантными составляющими которого являются $i\partial_\alpha$, и, следовательно,

$$\partial_\alpha = -ip_\alpha. \tag{7.37}$$

Прием «включения внешнего поля», т. е. перехода от уравнения Дирака для свободного электрона к уравнению для электрона во внешнем поле, состоит в замене импульсов p^α на $p^\alpha - eA^\alpha$ [1]).

Переходя к ковариантным компонентам $p_\alpha - eA_\alpha$ и заменяя этими операторами p_α в (7.37), получаем вместо ∂_α операторы

$$D_\alpha = -i(p_\alpha - eA_\alpha) = \partial_\alpha + ieA_\alpha. \tag{7.38}$$

Теперь остается переписать спинорные уравнения Дирака (7.34), заменив в них дифференциальные операторы $\partial^{\mu\dot{\nu}}$, $\partial_{\mu\dot{\nu}}$ на

$$\begin{gathered}(D^{\mu\dot{\nu}}) = \begin{pmatrix} D_0 + D_3 & D_1 - iD_2 \\ D_1 + iD_2 & D_0 - D_3 \end{pmatrix}, \\ (D_{\mu\dot{\nu}}) = \begin{pmatrix} D_0 - D_3 & -D_1 - iD_2 \\ -D_1 + iD_2 & D_0 + D_3 \end{pmatrix}\end{gathered} \tag{7.39}$$

(ср. (7.6), (7.7)); это приводит к уравнениям

$$D^{\mu\dot{\nu}}\eta_{\dot{\nu}} + im\xi^\mu = 0, \quad D_{\mu\dot{\nu}}\xi^\mu + im\eta_{\dot{\nu}} = 0. \tag{7.40}$$

Уравнения Максвелла. Следующее поле, которое мы рассмотрим, — действительное поле типа $(1, 0)\oplus\oplus(0, 1)$ (предыдущие поля были не действительными). В этом случае надо построить представления группы $SL(2)$ типов $(1, 0)$ и $(0, 1)$, а затем, как это было описано выше общим образом, построить представление группы $\mathscr{P}$ на сумме соответствующих пространств. Представления типов $(1, 0)$, $(0, 1)$ задаются симметрическими спин-тензорами валентности $(1, 0)$ (соответственно $(0, 1)$), т. е. двухиндексными симметрическими спин-тензорами $f_{\mu\nu}$, $f_{\dot{\mu}\dot{\nu}}$. Размерность каждого из этих представле-

---

[1]) Мы полагаем здесь $\hbar = 1$, $c = 1$.

ний равна трем (подчеркнем, что речь идет о комплексной размерности; действительное подпространство для поля будет выделено дальше). Следовательно, всего у поля шесть компонент:

$$\begin{aligned} &f_{11}(x), \quad f_{12}(x) = f_{21}(x), \quad f_{22}(x), \\ &f_{\dot 1\dot 1}(x), \quad f_{\dot 1\dot 2}(x) = f_{\dot 2\dot 1}(x), \quad f_{\dot 2\dot 2}(x). \end{aligned} \tag{7.41}$$

Удобно перейти к другой записи тех же спин-тензоров, подняв один из индексов:

$$f^{\tau}_{\sigma} = C^{\tau\rho} f_{\sigma\rho}, \quad f^{\dot\tau}_{\dot\sigma} = C^{\dot\tau\dot\rho} f_{\dot\sigma\dot\rho}; \tag{7.42}$$

легко видеть, что симметричность спин-тензора $f_{\sigma\tau}$ равносильна «бесследности» f^{τ}_{σ}:

$$f^{\sigma}_{\sigma} = 0, \quad f^{\dot\sigma}_{\dot\sigma} = 0. \tag{7.43}$$

Почти очевидно, как записать инвариантные уравнения для такого поля:

$$\partial^{\rho\dot\tau} f^{\sigma}_{\rho} = 0, \quad \partial^{\tau\dot\rho} f^{\dot\sigma}_{\dot\rho} = 0. \tag{7.44}$$

Как мы увидим, это и есть уравнения Максвелла в спинорной форме (без правых частей). Заметим, что матрицы $\partial^{\rho\dot\tau}$, $\partial^{\tau\dot\rho}$ в этих уравнениях взаимно транспонированы, так как суммирование производится по разным индексам; в силу (7.6) они комплексно сопряжены. Ввиду действительности поля имеем в сопряженном базисе

$$f^{\dot\sigma}_{\dot\rho} = \bar f^{\sigma}_{\rho}, \tag{7.45}$$

так что уравнения (7.44) комплексно сопряжены и тем самым эквивалентны. Они выделяют действительное векторное пространство полей, допускающих по общим правилам (7.18) пространственное отражение и обращение времени. Описанное действительное поле типа $(1, 0) \oplus (0, 1)$ называется *электромагнитным полем.*

Компоненты поля $f^{\dot\sigma}_{\dot\rho}$ нужны лишь для обеспечения пространственных отражений; описание инвариантного подпространства при помощи обоих уравнений (7.44) в «удвоенном» пространстве полей $\{f^{\sigma}_{\rho}, f^{\dot\sigma}_{\dot\rho}\}$ полностью задается *одним* из этих уравнений. Таким образом, уравнения (7.44) не составляют совместной системы уравнений; достаточно рассмотреть, например, первое из них.

Прежде чем переходить к сопоставлению уравнений (7.44) с обычными уравнениями для полей $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, запишем еще соответствующие спинорные уравнения с правыми частями. 4-вектор тока j^α заменяется в спинорной трактовке смешанным спин-тензором $s^{\sigma\dot{\tau}}$ следующего вида (где, по правилу (5.2), в правой части стоят *ковариантные* компоненты j, т. е. j^0, $-j^1$, $-j^2$, $-j^3$):

$$\begin{pmatrix} s^{1\dot{1}} & s^{1\dot{2}} \\ s^{2\dot{1}} & s^{2\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j^0 - j^3 & -j^1 + ij^2 \\ -j^1 - ij^2 & j^0 + j^3 \end{pmatrix}. \tag{7.46}$$

Неоднородные уравнения Максвелла в спинорной форме следует записать теперь в виде, учитывающем комплексную сопряженность правых частей:

$$\partial^{\rho\dot{\tau}} f^\sigma_\rho = s^{\sigma\dot{\tau}}, \qquad \partial^{\tau\dot{\rho}} f^{\dot{\sigma}}_{\dot{\rho}} = s^{\tau\dot{\sigma}}. \tag{7.47}$$

Чтобы убедиться в том, что любое из этих (комплексно сопряженных) уравнений равносильно обычным уравнениям Максвелла, введем независимые комплексные координаты F^1, F^2, F^3 для спин-тензоров f^σ_ρ, исключив лишнюю компоненту; это удобно сделать с помощью следующей подстановки, напоминающей прием (5.2) (но учитывающей «бесследность» f^σ_ρ):

$$\begin{pmatrix} f^1_1 & f^1_2 \\ f^2_1 & f^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^3 & F^1 - iF^2 \\ F^1 + iF^2 & -F^3 \end{pmatrix}. \tag{7.48}$$

Первое уравнение (7.47) принимает теперь вид (ср. (7.6)):

$$\left.\begin{aligned} (\partial_0 + \partial_3) F^3 + (\partial_1 + i\partial_2)(F^1 - iF^2) &= j^0 - j^3, \\ (\partial_1 - i\partial_2) F^3 + (\partial_0 - \partial_3)(F^1 - iF^2) &= -j^1 + ij^2, \\ (\partial_0 + \partial_3)(F^1 + iF^2) + (\partial_1 + i\partial_2)(-F^3) &= -j^1 - ij^2, \\ (\partial_1 - i\partial_2)(F^1 + iF^2) + (\partial_0 - \partial_3)(-F^3) &= j^0 + j^3. \end{aligned}\right\} \tag{7.49}$$

Разложим $\boldsymbol{F} = (F^1, F^2, F^3)$ на действительную и мнимую части:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} - i\boldsymbol{H}. \tag{7.50}$$

Подставляя это выражение в (7.49) и отделяя действительные и мнимые части, получаем последовательно восемь действительных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\dot{E}^3-(\operatorname{rot}\boldsymbol{H})^3+\operatorname{div}\boldsymbol{E}=j^0-j^3,\\
&-\dot{H}^3-(\operatorname{rot}\boldsymbol{E})^3-\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0,\\
&-\dot{H}^2-(\operatorname{rot}\boldsymbol{E})^2+\dot{E}^1-(\operatorname{rot}\boldsymbol{H})^1=-j^1,\\
&-\dot{H}^1-(\operatorname{rot}\boldsymbol{E})^1-\dot{E}^2+(\operatorname{rot}\boldsymbol{H})^2=j^2,\\
&\dot{E}^1-(\operatorname{rot}\boldsymbol{H})^1+\dot{H}^2+(\operatorname{rot}\boldsymbol{E})^2=-j^1,\\
&\dot{E}^2-(\operatorname{rot}\boldsymbol{H})^2-\dot{H}^1-(\operatorname{rot}\boldsymbol{E})^1=-j^2,\\
&-\dot{E}^3+(\operatorname{rot}\boldsymbol{H})^3+\operatorname{div}\boldsymbol{E}=j^0+j^3,\\
&\dot{H}^3+(\operatorname{rot}\boldsymbol{E})^3-\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0.
\end{aligned}
$$

Путем сложения и вычитания из этих уравнений получаются уравнения Максвелла в обычном виде:

$$
\begin{gathered}
\operatorname{rot}\boldsymbol{E}+\dot{\boldsymbol{H}}=0,\quad \operatorname{rot}\boldsymbol{H}-\dot{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{j},\\
\operatorname{div}\boldsymbol{E}=j^0,\quad \operatorname{div}\boldsymbol{H}=0.
\end{gathered}
\tag{7.51}
$$

Заметим, что наше пространство представления $(1, 0)$, состоящее из спин-тензоров f^{σ}_{ρ}, есть трехмерное комплексное пространство, в котором можно считать координатами F^1, F^2, F^3; аналогично пространство представления $(0, 1)$ имеет координаты $\bar{F}^1$, $\bar{F}^2$, $\bar{F}^3$. Таким образом, с точки зрения теории представлений естественно задавать электромагнитное поле комплексными линейными комбинациями

$$
\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}-i\boldsymbol{H},\quad \bar{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{E}+i\boldsymbol{H}\text{[1]}. \tag{7.52}
$$

Это помогает выяснить смысл поляризации поля (см. [13]). Как мы уже знаем, пространства $(1, 0)$ и $(0, 1)$ связаны пространственным отражением, чем и объясняется необходимость их совместного рассмотрения.

Уравнения Максвелла были впервые записаны в спинорном виде Улепбеком и Лапортом в 1931 году. Это их выражение представляет еще один пример того, насколько проще и естественнее могут выглядеть физические законы в рамках адекватного им математи-

[1] Иногда в литературе используются поля $\boldsymbol{H}+i\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}-i\boldsymbol{E}$, отличающиеся от (7.52) множителями i, $-i$.

ческого аппарата, нежели в своем исторически возникшем виде. Преобразование (7.52), связывающее обычно употребляемую форму уравнений Максвелла с естественно возникающей из теории представлений, напоминает аналогичное преобразование биспиноров Дирака (6.32).

Приведем еще выражение в спинорной форме тензора энергии-импульса электромагнитного поля

$$t^{\dot{\rho}\dot{\sigma}\lambda\nu} = \frac{1}{4} f^{\dot{\rho}\dot{\sigma}} f^{\lambda\nu}$$

и 4-вектора силы Лоренца

$$k_{\lambda\dot{\rho}} = \frac{1}{2} \left(s_{\lambda}^{\dot{\sigma}} f_{\dot{\sigma}\dot{\rho}} + s_{\dot{\rho}}^{\sigma} f_{\sigma\lambda} \right).$$

Отождествление этих выражений с обычными мы предоставляем читателю.

Неприводимость классических полей. Напомним, что общая исходная идея при построении полей состояла в выделении *неприводимого подпространства* в пространстве полей данного типа по отношению к представлению группы Пуанкаре, задающему этот тип поля. Для этой цели и служат «инвариантные дифференциальные уравнения», такие, как уравнения Вейля, Дирака и Максвелла. Мы построили эти уравнения в спинорной форме, делающей инвариантность соответствующих пространств почти очевидной; это значит, что, например, преобразования группы Пуанкаре переводят любое решение уравнения Дирака в другое решение этого уравнения.

Однако мы не доказали еще, что «инвариантные уравнения» действительно достигают поставленной цели, т. е. задают пространства полей, неприводимые по отношению к группе Пуанкаре. Доказательства неприводимости представлений, вообще говоря, достаточно сложны, но в интересующих нас случаях можно, во всяком случае, объяснить существо дела, не входя в математические трудности [1]). Решения «полевых уравне-

[1]) В случае бесконечномерных представлений надо точно определить, в каком пространстве (например, гильбертовом) строится представление, и в каком смысле понимается непри-

ний» могут быть построены из «плоских волн», т. е. решений специального вида

$$\psi_\mu(x) = a_\mu e^{i(p^0x^0 - p^1x^1 - p^2x^2 - p^3x^3)}; \tag{7.53}$$

вектор p задает импульс соответствующего полю кванта, а коэффициенты a_μ подбираются таким образом, чтобы поле (7.53) удовлетворяло данному инвариантному уравнению. Возможность построить из решений вида (7.53) *все* решения уравнения обеспечивается весьма общими теоремами математической физики: если ищут решение уравнения первого порядка по начальному условию Коши, т. е. по заданным функциям $\psi_\mu(0, x^1, x^2, x^3)$, то эти функции разлагают в интеграл Фурье по системе функций $e^{i(px)}$,

$$\psi_\mu(0, \boldsymbol{x}) = \int a_\mu(\boldsymbol{p})\, e^{i(\boldsymbol{px})} d\boldsymbol{p},$$

и тогда, по теоремам единственности, решение имеет вид

$$\psi_\mu(x^0, \boldsymbol{x}) = \int a_\mu(\boldsymbol{p})\, e^{i(p^0x^0 - \boldsymbol{px})} d\boldsymbol{p}.$$

Итак, всякое решение может быть получено суперпозицией плоских волн. Возьмем волну с заданным 4-импульсом p; тогда коэффициенты $a_\mu(p)$ должны зависеть от p вполне определенным образом (в случае уравнения Дирака такие плоские волны описываются в учебниках квантовой механики). Можно показать, что преобразования Лоренца переводят одну такую волну во все волны, удовлетворяющие рассматриваемому уравнению. Инвариантное пространство, содержащее хотя бы одну такую волну, содержит тем самым все волны, удовлетворяющие уравнению; в силу линейности пространство содержит и все их линейные комбинации, т. е. все решения вообще. Но тогда не может быть инвариантного пространства, меньшего, чем пространство всех решений.

водимость. Мы рассматриваем дальше решения в виде плоских волн, как если бы они входили в пространство представления, что в случае гильбертова пространства неверно.

Конечно, это рассуждение не является доказательством неприводимости; надо было бы, например, еще доказать, что в любом инвариантном пространстве решений «содержится» (или может быть аппроксимирована решениями из этого пространства) хотя бы одна плоская волна. Мы имели в виду лишь объяснить, почему рассмотренные поля в самом деле неприводимы.

§ 8. Алгебры Ли

Экспоненциальное отображение. Пусть a — матрица произвольной размерности n. Тогда, как известно из алгебры, можно построить с помощью показательного ряда матрицу e^a; при этом

$$\det(e^a) = e^{\operatorname{Sp} a}, \tag{8.1}$$

где $\operatorname{Sp} a = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$.

Из (8.1) следует, что матрица e^a всегда обратима. При замене базиса, когда a переходит в $a' = waw^{-1}$, имеем $e^{a'} = we^a w^{-1}$, так что экспоненциальное отображение $a \to e^a$ сопоставляет каждому линейному преобразованию a n-мерного пространства $\mathbb{C}^n$ невырожденное линейное преобразование e^a.

Если матрицы a, b перестановочны ($ab = ba$), то легко вывести соотношение

$$e^{a+b} = e^a e^b.$$

Для неперестановочных матриц a, b это соотношение, как видно на примерах, неверно. Тем не менее «логарифмирование» матриц, т. е. представление их в виде $u = e^a$, имеет важные применения. Главная причина этого состоит в том, что если матрицы $\{u\}$ образуют группу, элементы которой зависят от некоторого числа непрерывных параметров (*группу Ли*), то их «логарифмы» образуют *линейную* систему матриц: операции сложения и умножения на действительные числа не выводят за пределы этой системы. Эти операции, а также операция «коммутирования», определяемая ниже, в некоторой степени заменяют групповое умножение. Тем самым изучение группы значительно облегчается ее отображением на систему матриц с линейными операциями.

Если группа состоит из операторов, действующих в бесконечномерном пространстве, экспоненциальное отображение в ряде случаев может быть задано точно так же, с надлежащими доказательствами сходимости.

Алгебры Ли. Система матриц $\mathfrak{A}$ называется *алгеброй Ли*, если эта система содержит вместе с каждыми двумя матрицами a, b все их линейные комбинации с действительными коэффициентами, а также коммутатор

$$\frac{1}{i}[a,\ b]=\frac{1}{i}(ab-ba)\text{[1]}. \tag{8.2}$$

Подчеркнем, что умножение матриц выводит за пределы алгебры Ли и не является, таким образом, допустимой операцией над элементами $\mathfrak{A}$.

В качестве первого примера рассмотрим систему всех бесследных матриц a второго порядка, т. е. таких матриц, у которых $\operatorname{Sp} a=0$. В силу (8.1), $u=e^a$ есть унимодулярная матрица; обратно, любая унимодулярная матрица u, как можно показать, представима в этом виде. Мы будем, однако, записывать связь между унимодулярными и бесследными матрицами несколько иначе:

$$u=e^{ia}. \tag{8.3}$$

Преимущество этой записи состоит в том, что *унитарные* матрицы u соответствуют *эрмитовым* матрицам a; в самом деле, легко проверить, что из $\overset{+}{a}=a$ следует $\overset{+}{u}=u^{-1}$. Линейные комбинации бесследных матриц (даже с комплексными коэффициентами) опять бесследны, и $\operatorname{Sp}[a,\ b]=\operatorname{Sp}(ab)-\operatorname{Sp}(ba)=0$ (даже для всех матриц a, b). Таким образом, *бесследные матрицы образуют алгебру Ли*, связанную с группой $SL(2)$ экспоненциальным отображением (8.3) и называемую алгеброй Ли этой группы.

Вторым примером служат эрмитовы матрицы a; в этом случае линейные комбинации можно брать

---

[1]) Мы выбрали определение коммутатора, при котором коммутатор эрмитовых матриц оказывается эрмитовой матрицей. В математической литературе множитель $1/i$ в (8. 2) отбрасывается, что приводит к несколько иному определению алгебры Ли.

лишь с действительными коэффициентами, чтобы получить опять эрмитовы матрицы. Если a, b — эрмитовы матрицы, то $((1/i)\,[a, b])^+=(1/i)\,[a, b]$ также эрмитова. Итак, эрмитовы матрицы образуют алгебру Ли, связанную с унитарной группой $U(2)$ отображением (8.3). *Бесследные* эрмитовы матрицы также образуют алгебру Ли, связанную с группой $SU(2)$.

Обратный переход от группы к ее алгебре Ли достигается следующим приемом. Пусть группа выделяется с помощью некоторых условий, наложенных на входящие в нее матрицы u. Тогда, полагая $u=e^{i\varepsilon a}$, где ε — малое число, заменяя $e^{i\varepsilon a}$ рядом $1+i\varepsilon a+\ldots$ и сохраняя в задающих группу условиях лишь члены нулевого и первого порядков по ε, получаем соответствующие условия для матриц алгебры Ли a. Например, из условия (1.19), задающего преобразования Лоренца, находим соотношения для матриц соответствующей алгебры Ли; это матрицы с чисто мнимыми элементами, для которых

$$g_{\alpha\alpha}a_{\alpha\beta}=-g_{\beta\beta}a_{\beta\alpha}$$
$$(g_{00}=1,\quad g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1). \qquad (8.4)$$

Читатель легко проверит, что такие матрицы образуют алгебру Ли, а отображение (8.3) переводит их в преобразования Лоренца. Точно так же для группы вращений $SO(3)$ алгебра Ли состоит из чисто мнимых антисимметрических матриц третьего порядка.

Перестановочные соотношения. Поскольку матрицы алгебры Ли можно складывать и умножать на действительные числа, они образуют действительное векторное пространство. Базис этого пространства состоит из матриц a_k, через которые все матрицы алгебры Ли могут быть выражены как линейные комбинации с действительными коэффициентами:

$$a=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k a_k.$$

Базисные матрицы a_k называются *образующими* алгебры Ли (в физической литературе также *генераторами*). Если известны коммутаторы образующих

$[a_k, a_l]$, то полностью задается и коммутирование любых матриц алгебры Ли:

$$[a, b] = \left[\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k, \ \sum_{l=1}^{m} \mu_l a_l\right] = \sum_{k,\, l=1}^{m} \lambda_k \mu_l [a_k, a_l].$$

Коммутаторы образующих, как и все матрицы алгебры Ли, могут быть выражены через те же образующие:

$$\frac{1}{i}[a_k, a_l] = c_{kl}^{j} a_j. \qquad (8.5)$$

Числа c_{kl}^{j} называются *структурными постоянными* алгебры Ли; задание образующих и структурных постоянных полностью определяет алгебру Ли. Поскольку $[a, b] = -[b, a]$, $[a, a] = 0$, достаточно записать по одному перестановочному соотношению (8.5) для каждой пары образующих a_k, a_l $(k \neq l)$. Этим способом удобно задавать и группы Ли, связанные с алгебрами экспоненциальным соотношением (8.3). Следует заметить, впрочем, что выбор базиса в алгебре Ли и тем самым перестановочных соотношений может быть выполнен различными способами, так что не следует отождествлять алгебру Ли с ее перестановочными соотношениями. Обычно выбирают базис таким образом, чтобы перестановочные соотношения имели возможно более простой вид.

Выпишем перестановочные соотношения для рассмотренных выше алгебр.

Группа $SL(2)$. Возьмем в качестве образующих бесследные матрицы

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \\ &\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad (8.6)$$

Все бесследные матрицы второго порядка линейно выражаются через матрицы (8.6) с действительными коэффициентами. Заметим, что соотношения $\tau_k = i\sigma_k$ не означают линейной зависимости образующих, так как алгебра Ли является *действительным* векторным пространством; умножение на i в таком пространстве следует рассматривать как линейный оператор, действующий на векторы, но не как умножение векторов на число. Перестановочные соотношения для матриц (8.6) могут быть проверены непосредственно:

$$
\begin{gathered}
[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3, \quad [\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1, \quad [\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2; \\
[\tau_1, \tau_2] = -2i\sigma_3, \quad [\tau_2, \tau_3] = -2i\sigma_1, \quad [\tau_3, \tau_1] = -2i\sigma_2; \\
[\sigma_1, \tau_2] = 2i\tau_3, \quad [\sigma_2, \tau_3] = 2i\tau_1, \quad [\sigma_3, \tau_1] = 2i\tau_2; \\
[\tau_1, \sigma_2] = 2i\tau_3, \quad [\tau_2, \sigma_3] = 2i\tau_1, \quad [\tau_3, \sigma_1] = 2i\tau_2; \\
[\sigma_k, \tau_k] = 0 \qquad (k = 1, 2, 3).
\end{gathered} \tag{8.7}
$$

Здесь, как и в дальнейшем, не записываются тривиальные соотношения вида $[a, a] = 0$. Согласно (8.3) бинарные матрицы имеют вид

$$
u = \exp i\,(\vartheta_1\sigma_1 + \vartheta_2\sigma_2 + \vartheta_3\sigma_3 + \vartheta_1'\tau_1 + \vartheta_2'\tau_2 + \vartheta_3'\tau_3), \tag{8.8}
$$

где ϑ_k, ϑ_k' — действительные коэффициенты. Из этого представления ясно, что матрицы u зависят от шести действительных параметров, т. е. группа $SL(2)$ является шестипараметрической группой.

Группа $SU(2)$. В этом случае в качестве образующих алгебры Ли можно взять бесследные эрмитовы матрицы σ_k $(k=1, 2, 3)$ с перестановочными соотношениями, выписанными в первой строке (8.7). Общий вид матриц группы $SU(2)$ указывает, что эта группа зависит от трех параметров:

$$
u = \exp i\,(\vartheta_1\sigma_1 + \vartheta_2\sigma_2 + \vartheta_3\sigma_3). \tag{8.9}
$$

Группа $L_+^\uparrow$. Образующие алгебры Ли для группы Лоренца могут быть получены из образующих для группы $SL(2)$ с помощью накрытия h (§ 5). Матрицам σ_k, τ_k соответствуют однопараметрические семейства бинарных матриц

$$
e^{i\vartheta\sigma_k} = \cos\vartheta + i\sigma_k \sin\vartheta, \qquad e^{i\vartheta\tau_k} = \operatorname{ch}\vartheta - \sigma_k \operatorname{sh}\vartheta \tag{8.10}
$$

(ср. (5.16), (5.17)). Тогда, как вытекает из (5.13), соответствующие семейства преобразований Лоренца суть

$$
e^{2i\vartheta M_k}, \quad e^{2i\vartheta K_k}, \tag{8.11}
$$

где M_k, K_k принадлежат алгебре Ли группы $L_+^\uparrow$:

$$M_1=\frac{1}{i}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix},\quad M_2=\frac{1}{i}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$M_3=\frac{1}{i}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};\tag{8.12}$$

$$K_1=-\frac{1}{i}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad K_2=-\frac{1}{i}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$K_3=-\frac{1}{i}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Матрицы $2M_k$, $2K_k$ удовлетворяют, как легко проверить, тем же перестановочным соотношениям, что σ_k, τ_k; для вдвое меньших матриц M_k, K_k перестановочные соотношения несколько упрощаются:

$$\begin{gathered}[M_1,\ M_2]=iM_3,\quad [M_2,\ M_3]=iM_1,\\ [M_3,\ M_1]=iM_2;\\ [K_1,\ K_2]=-iM_3,\quad [K_2,\ K_3]=-iM_1,\\ [K_3,\ K_1]=-iM_2;\\ [M_1,\ K_2]=iK_3,\quad [M_2,\ K_3]=iK_1,\\ [M_3,\ K_1]=iK_2;\\ [K_1,\ M_2]=iK_3,\quad [K_2,\ M_3]=iK_1,\\ [K_3,\ M_1]=iK_2;\\ [M_k,\ K_k]=0\qquad (k=1,\ 2,\ 3).\end{gathered}\tag{8.13}$$

Нетрудно показать, что все чисто мнимые матрицы, подчиняющиеся условиям (8.4), линейно выражаются через матрицы (8.12) с действительными коэффициентами. Таким образом, M_k, K_k составляют систему образующих алгебры Ли группы $L_+^\uparrow$. Преобразования

Лоренца записываются в виде, аналогичном (8.8), и зависят от шести действительных параметров.

Группа $SO(3)$. Для этой группы накрывающей является $SU(2)$. Семейству матриц $e^{i\vartheta\sigma_k}$ соответствует при накрытии $e^{2i\vartheta M_k}$, где

$$M_1=\frac{1}{i}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix},\quad M_2=\frac{1}{i}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$
$$M_3=\frac{1}{i}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \tag{8.14}$$

а перестановочные соотношения те же, что в первой строке (8.13). Все чисто мнимые антисимметрические матрицы линейно выражаются через матрицы (8.14) с действительными коэффициентами. Тем самым $SO(3)$ — трехпараметрическая группа; собственные вращения записываются в виде, аналогичном (8.9).

Однопараметрические подгруппы. Пусть в некоторой группе G, состоящей из линейных преобразований u, задано однопараметрическое семейство элементов $\{u(\vartheta)\}$, удовлетворяющее условию

$$u(\vartheta_1+\vartheta_2)=u(\vartheta_1)\cdot u(\vartheta_2). \tag{8.15}$$

Такое семейство, как легко видеть, составляет подгруппу в G, с единичным элементом $u(0)=1$ (единица группы G) и обратными элементами $u(\vartheta)^{-1}=u(-\vartheta)$. Примерами таких однопараметрических подгрупп являются рассмотренные выше семейства (8.10) в группе $SL(2)$, (8.11) в $L_+^\uparrow$, $e^{i\vartheta\sigma_k}$ в $SU(2)$, $e^{2i\vartheta M_k}$ в $SO(3)$. Можно показать, что любая однопараметрическая подгруппа в G имеет вид

$$u(\vartheta)=e^{i\vartheta a}, \tag{8.16}$$

где a принадлежит алгебре Ли группы G. Обратно, для любого элемента a алгебры Ли элементы (8.16) образуют однопараметрическую подгруппу группы G. Таким образом, между однопараметрическими подгруппами и элементами алгебры Ли устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Представления алгебры Ли. Представление группы G есть семейство линейных операторов T_u, действующих в некотором векторном пространстве V, со свойствами, описанными в § 2. В частности, каждой однопараметрической подгруппе (8.16) группы G соответствует однопараметрическая подгруппа $U(\vartheta)=T_{u(\vartheta)}$. Примером может служить представление группы $SL(2)$ преобразованиями Лоренца $\Lambda=h(u)$, в котором однопараметрическим подгруппам (8.10) соответствуют однопараметрические подгруппы (8.11). В общем случае любая однопараметрическая подгруппа $U(\vartheta)$, состоящая из операторов пространства V, также может быть записана в виде

$$U(\vartheta)=e^{i\vartheta A}, \tag{8.17}$$

где A — оператор, однозначно определяемый по подгруппе $\{U(\vartheta)\}$ разложением

$$U(\vartheta)=1+i\vartheta A+\ldots, \qquad A=\frac{1}{i}U'(0). \tag{8.18}$$

Мы приходим, таким образом, к следующему соответствию $a\to A$: каждому элементу a алгебры Ли группы G сопоставляется однопараметрическая подгруппа (8.16) этой группы; в заданном представлении G этой подгруппе соответствует однопараметрическая подгруппа операторов $U(\vartheta)=T_{u(\vartheta)}$; последняя, в свою очередь, порождается оператором A по формуле (8.17).

Положим $A=T_a$; тогда, как можно показать, справедливы следующие соотношения:

1) $T_{a+b}=T_a+T_b$;
2) $T_{\lambda a}=\lambda T_a$ для действительных λ;
3) Если $(1/i)[a, b]=c$, то $(1/i)[T_a, T_b]=T_c$.

Если соответствие $a\to T_a$ обладает свойствами 1)—3), оно называется *представлением алгебры Ли* в пространстве V. Итак, каждое представление группы G задает представление алгебры Ли этой группы в том же пространстве.

Алгебраические операции $a+b$, λ_a и $(1/i)$ $[a, b]$ воспроизводятся в любом представлении такими же операциями $A+B$, λA и $(1/i)\,[A, B]$. Для определения $A=T_a$ служит разложение (8.18).

Ввиду свойств 1), 2) представление алгебры Ли полностью задается указанием операторов T_{a_k}, представляющих образующие алгебры. Тем самым задается и представление соответствующей группы Ли; в самом деле, полагая в (8.16) $\vartheta=1$, получаем произвольный элемент группы $u=e^{ia}$, которому в представлении соответствует $U(1)=e^{iA}$ (см. (8.17)). Если выразить a через образующие в виде $\Sigma\lambda_k a_k$ и обозначить T_{a_k} через A_k, то оператор $T_u=U$, соответствующий u, представляется в виде

$$U=e^{i\sum\lambda_k A_k}. \tag{8.19}$$

Только что описанный способ задания представлений особенно удобен, поскольку требует лишь перечисления конечного числа операторов $A_k=T_{a_k}$, действующих в пространстве V, между тем как самое определение представления группы предполагает задание операторов T_u, соответствующих всем элементам группы.

Этот метод будет использован в § 9 и во второй части книги.

Отметим важный случай, когда представление группы G унитарно. В этом случае операторы представления (8.17) унитарны, т. е. $\overset{+}{U}(\vartheta)=U^{-1}(\vartheta)$, и из (8.18) следует, что $1-i\vartheta\overset{+}{A}+\ldots=1-i\vartheta A+\ldots$ при всех действительных ϑ, откуда $\overset{+}{A}=A$. Итак, *в унитарных представлениях группы Ли элементы ее алгебры Ли представляются эрмитовыми операторами.* В этом состоит причина, по которой «наблюдаемые» квантовой механики изображаются эрмитовыми операторами, о чем будет подробно сказано в части второй.

Алгебра Ли группы Пуанкаре. В предыдущих построениях важную роль играло экспоненциальное отображение (8.3), служившее для установления связи между группами Ли и их алгебрами Ли, а также для описания однопараметрических подгрупп. Показательная функция e^{ia} может быть определена для линейных преобразований a в конечномерных пространствах, заданных матрицами, или для операторов a в бесконечномерных пространствах; для таких «матричных» или «операторных» групп мы и построили выше алгебры Ли и их представления.

Однако в приложениях встречаются и группы иного характера, элементы которых не являются линейными преобразованиями. Элементами группы Пуанкаре являются пары (a, Λ), которые можно сопоставить с преобразованиями пространства Минковского, сохраняющими интервалы. Поскольку пространство Минковского не является векторным пространством (точки нельзя ни складывать, ни умножать на числа), такие преобразования не являются линейными и к ним неприменима изложенная выше техника. То же относится к группе $\mathscr{P}_{+}^{\uparrow}$, накрывающей специальную группу Пуанкаре: она состоит из пар (a, u), где a — вектор пространства Минковского, u — бинарная матрица, а эти пары непосредственно не связаны с преобразованиями какого-либо пространства.

Трудности, возникающие для таких групп, могут быть преодолены с помощью общего метода, позволяющего сопоставить алгебру Ли *любой* группе Ли, т. е. группе, элементы которой описываются конечным числом параметров. В такой группе строятся всевозможные однопараметрические подгруппы (см. (8.15)). Для матричных групп, как мы видели, такие подгруппы находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами их алгебр Ли; в общем же случае однопараметрические подгруппы группы G просто *называются* элементами алгебры Ли этой группы, заменяя таким образом отсутствующие матрицы a формулы (8.16). Для однопараметрических подгрупп группы G устанавливаются операции сложения, умножения на действительные числа и коммутирования; с этими операциями они образуют алгебраическую систему, называемую алгеброй Ли группы G.

Для изучения этой алгебры часто применяется следующий метод. Пусть некоторой области изменения параметров, задающих элементы группы, соответствует часть группы G, содержащая ее единицу; такая часть называется окрестностью единицы в G. Две группы Ли G, G' называются *локально изоморфными*, если существуют окрестность единицы G_0 в группе G и окрестность единицы G_0' в группе G', между которыми установлено взаимно однозначное соответствие, сохраняющее групповую операцию. Например, группа $L_+^\uparrow$ локально изоморфна ее накрывающей $SL(2)$; $SO(3)$ локально изоморфна $SU(2)$; $\mathscr{P}_+^\uparrow$ локально изоморфна $\tilde{\mathscr{P}}_+^\uparrow$ (во всех этих случаях соответствие окрестностей задается отображением накрытия).

В частности, *изоморфные* группы локально изоморфны: в этом случае можно взять в качестве G_0 всю группу G и в качестве G_0' всю группу G'. Например, *точное* представление группы G задает изоморфизм между этой группой и группой представляющих ее операторов: $u \to T_u$; к этому изоморфизму применимы формулируемые дальше теоремы.

Как уже было сказано, для любой группы Ли G может быть определена алгебра Ли, элементами которой служат однопараметрические подгруппы G. Оказывается, что *локально изоморфные группы Ли имеют изоморфные алгебры Ли*, т. е. между их алгебрами Ли устанавливается взаимно однозначное соответствие, сохраняющее операции сложения, умножения на действительные числа и коммутирования. Поэтому строение алгебры Ли группы G совпадает со строением алгебры Ли любой локально изоморфной ей группы G'. Оказывается далее, что *для любой группы Ли можно найти локально изоморфную ей группу, состоящую из линейных операторов некоторого векторного пространства*. Таким образом, строение алгебры Ли любой группы G может быть изучено с помощью описанных выше средств, использующих экспоненциальное отображение.

Нам придется ограничиться здесь формулировкой этих результатов; мы не останавливаемся при этом на математической технике, служащей для введения операций над однопараметрическими подгруппами любой группы Ли.

Займемся теперь группой $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Как уже было сказано, она локально изоморфна группе $\tilde{\mathscr{P}}_+^\uparrow$, а эта последняя имеет точные «полевые» представления (§ 2), из которых мы воспользуемся простейшим, однокомпонентным: каждому элементу (a, Λ) группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ соответствует оператор $U[a, \Lambda]$, заданный формулой

$$\psi' = U[a, \Lambda]\psi, \tag{8.20}$$

где $\psi'(x) = \psi(\Lambda^{-1}(x-a))$.

Группа, состоящая из операторов $U[a, \Lambda]$, имеет алгебру Ли из операторов a, действующих в том же пространстве ψ-функций. Строение этой алгебры мы легко изучим с помощью экспоненциального отображения; тем самым будет описана и алгебра Ли группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$.

Перестановочные соотношения группы Пуанкаре. Однопараметрические подгруппы группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ мы уже отчасти знаем: это подгруппы (8.10), накрывающие вращения и бусты. Поскольку эти однопараметрические подгруппы принадлежат *матричной* группе $SL(2)$, входящей в $\mathscr{P}_+^\uparrow$, они допускают экспоненциальное представление. К ним следует прибавить четыре подгруппы сдвигов:

$$g_\alpha(\vartheta) = (\vartheta e_\alpha, 1), \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3. \tag{8.21}$$

Переходя к локально изоморфной группе $\{U(a, \Lambda)\}$, получаем десять однопараметрических подгрупп; мы выпишем по одной подгруппе, соответствующей вращению, бусту и сдвигу:

$$\begin{aligned} U(\vartheta)\psi &= \psi(x_0, x_1\cos 2\vartheta - x_2\sin 2\vartheta, x_1\sin 2\vartheta + x_2\cos 2\vartheta, x_3),\\ U(\vartheta)\psi &= \psi(x_0 \operatorname{ch} 2\vartheta + x_3 \operatorname{sh} 2\vartheta, x_1, x_2, x_0\operatorname{sh} 2\vartheta + x_3\operatorname{ch} 2\vartheta),\\ U(\vartheta)\psi &= \psi(x_0, x_1, x_2, x_3 - \vartheta). \end{aligned} \tag{8.22}$$

Соответствующие операторы алгебры Ли могут быть найдены по правилу (8.18):

$$a = \frac{1}{i}U'(0), \quad a\psi = \frac{1}{i}\left(\frac{d}{d\vartheta}U(\vartheta)\psi\right)_{\vartheta=0}. \tag{8.23}$$

При дифференцировании (8.22) возьмем частные производные по *контравариантным* координатам, что приводит к упрощению записи операторов алгебры Ли; сверх того, разделим первые шесть образующих на два для упрощения перестановочных соотношений. Тогда десяти однопараметрическим подгруппам (8.22) соответствует десять образующих алгебры Ли:

$$M_{\alpha\beta} = -\frac{1}{i}\left(x_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta} - x_\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, \quad \alpha < \beta),$$
$$P_\alpha = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \qquad (\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{8.24}$$

Для удобства записи перестановочных соотношений введем операторы $M_{\alpha\beta}$ для *всех* значений α, β, полагая $M_{\alpha\alpha} = 0$ и $M_{\alpha\beta} = -M_{\beta\alpha}$ при $\alpha > \beta$. Тогда, как показывает прямая проверка, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered}[M_{\alpha\beta},\ M_{\gamma\delta}] = i\,(g_{\alpha\delta}M_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma}M_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma}M_{\beta\delta} - g_{\beta\delta}M_{\alpha\gamma}),\\ [M_{\alpha\beta},\ P_\gamma] = i\,(g_{\beta\gamma}P_\alpha - g_{\alpha\gamma}P_\beta),\\ [P_\alpha,\ P_\beta] = 0.\end{gathered} \tag{8.25}$$

Легко видеть, что десять операторов $M_{\alpha\beta}$ ($\alpha < \beta$), P_α линейно независимы; принимая эти операторы за A_k в формуле (8.19), получаем семейство элементов $U[a, \Lambda]$, зависящее от десяти параметров. Но группа Пуанкаре задается как раз с помощью десяти параметров: шесть из них задают Λ и четыре задают a. Таким образом, операторы (8.24) составляют *полную* систему образующих алгебры Ли, чем и завершается ее построение.

Операторы Казимира группы Пуанкаре. Любому представлению группы Ли G соответствует представление ее алгебры Ли $\mathfrak{A}$, заданное в том же пространстве V. Таким образом, каждому элементу a алгебры Ли соответствует оператор A, действующий на V. Даже в случае, когда группа Ли $\mathfrak{A}$ не состоит из линейных преобразований, представляющие операторы A можно умножать, как и любые операторы, действующие в одном и том же пространстве. Конечно, полученные произведения (в отличие от коммутаторов) уже не являются представляющими операторами алгебры Ли. Однако некоторые полиномы от представляющих операторов играют важную роль в теории групп Ли. Способ построения таких полиномов задается независимо от выбора представления символическим полиномом от элементов алгебры Ли $F(a, b, \ldots)$, служащим «образцом» для построения операторов того же строения во всех представлениях: $F(A, B, \ldots)$[1]). Например, символическому полиному $a^2+b^2+c^2$ соответствуют во всех представлениях операторы $A^2+B^2+C^2$, где A, B, C суть операторы, представляющие a, b, c.

Если для любого представления группы G оператор $F(A, B, \ldots)$ перестановочен со всеми операторами, представляющими ее алгебру Ли $\mathfrak{A}$, то $F(a, b, \ldots)$ называется *оператором Казимира* группы G. Легко проверить, что для коммутаторов справедливо тождество, аналогичное правилу дифференцирования произведения:

$$[AB, C]=[A, C]B+A[B, C].$$

С помощью этого тождества и перестановочных соотношений (8.25) нетрудно проверить, что группа $\mathcal{P}_+^\uparrow$ имеет следующие операторы Казимира:

$$(1)\qquad M^2=P_0^2-P_1^2-P_2^2-P_3^2 \tag{8.26}$$

(где оператор M не определяется вовсе, так что M^2 рассматривается как цельный символ; см. § 10);

$$(2)\qquad w^2=-w_\rho w^\rho, \tag{8.27}$$

где w опять не определяется, а операторы

$$w_\rho=\frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}P^\lambda M^{\mu\nu}; \tag{8.28}$$

здесь индексы у P^λ и $M^{\mu\nu}$ подняты по обычному правилу, а числа

$$\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}=\begin{cases} 0, & \text{если } \lambda, \mu, \nu, \rho \text{ не все различны,}\\ 1, & \text{если } (\lambda, \mu, \nu, \rho) \text{ составляют четную перестановку чисел } (0, 1, 2, 3),\\ -1, & \text{если } (\lambda, \mu, \nu, \rho) \text{ составляют нечетную перестановку чисел } (0, 1, 2, 3).\end{cases}$$

---

[1]) Такие символические полиномы, рассматриваемые с точностью до «элементарных преобразований» вида $ab \to ba+[a, b]$, где a, b — элементы алгебры Ли, а $(1/i)\,[a, b]$ — их коммутатор, образуют так называемую *универсальную обертывающую алгебру* алгебры Ли.

Можно показать, что все операторы Казимира группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ (а также $\mathscr{P}_+^\uparrow$) выражаются в виде полиномов от M^2 и w^2.

Роль операторов Казимира в теории представлений состоит в следующем. В силу (8.19) эти операторы перестановочны также со всеми операторами, представляющими *группу* Ли, так как эти последние разлагаются в степенной ряд по A_k. Если представление *неприводимо*, то оператор Казимира K удовлетворяет, таким образом, условиям леммы Шура (см. Приложение II). Следовательно, K является *гомотетией* пространства V, т. е. $Kv = \lambda v$, где λ не зависит от v. λ называется «значением» оператора K для данного представления. Если известна полная система операторов Казимира группы G, т. е. такая система K_1, $K_2, \ldots$, что каждый оператор Казимира этой группы является полиномом от K_1, $K_2, \ldots$, то в ряде случаев набор значений λ_1, $\lambda_2, \ldots$ этих операторов определяет неприводимое представление с точностью до эквивалентности. Во всяком случае, операторы Казимира весьма полезны для классификации представлений. Как мы увидим в § 10, они имеют глубокий физический смысл: с их помощью определяются понятия массы и спина частицы.

§ 9. Система неприводимых представлений бинарной группы и группы Лоренца

Симметрические спин-тензоры. Спин-тензорные представления, введенные в § 4, после разложения на неприводимые представления доставляют все возможные конечномерные неприводимые представления группы SL (2). Задача о полном разложении на неприводимые представления сложна и не будет здесь обсуждаться. Мы ограничимся тем, что выделим подпространства спин-тензоров, симметрических по отношению к спинорам и (отдельно) по отношению к коспинорам; такие подпространства оказываются инвариантными, и получающиеся в них представления группы SL (2) составляют уже полную систему неприводимых представлений этой группы.

Уточним, что здесь имеется в виду. Система неприводимых представлений некоторой группы G называется *полной*, если никакие два различных представления системы не эквивалентны друг другу, и если каждое неприводимое представление G эквивалентно одному из представлений системы.

Дадим теперь определение симметрического спин-тензора любой валентности. Пусть задан полином (ср. (4.10))

$$S=\sum_{j=1}^{N}\overset{(1)}{\xi}_j\otimes\ldots\otimes\overset{(r)}{\xi}_j\otimes\underset{(1)}{\dot\eta}_j\otimes\ldots\otimes\underset{(s)}{\dot\eta}_j. \tag{9.1}$$

Любая пара подстановок

$$\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & r\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_r\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & s\\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_s\end{pmatrix} \tag{9.2}$$

определяет преобразование $(\alpha,\ \beta)$, переводящее полином S в полином

$$P_{\alpha\beta}S=\sum_{j=1}^{N}\overset{\alpha(1)}{\xi}_j\otimes\ldots\otimes\overset{\alpha(r)}{\xi}_j\otimes\underset{\beta(1)}{\dot\eta}_j\otimes\ldots\otimes\underset{\beta(s)}{\dot\eta}_j. \tag{9.3}$$

Это значит, что в каждом мономе полинома S производятся перестановки множителей по правилу (9.2), одинаковому для всех полиномов. Например, если

$$\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

то

$$P_{\alpha\beta}(\xi\otimes\xi'\otimes\xi''\otimes\xi'''\otimes\dot\eta\otimes\dot\eta'\otimes\dot\eta'')=$$
$$=\xi''\otimes\xi'\otimes\xi'''\otimes\xi\otimes\eta''\otimes\eta\otimes\eta'.$$

Спин-тензор S называется *симметрическим*, если при любых α, β

$$P_{\alpha\beta}S=S. \tag{9.4}$$

Легко видеть, что элементарные преобразования полиномов S (§ 4) сопровождаются такими же преобразованиями полиномов $P_{\alpha\beta}S$; следовательно, $P_{\alpha\beta}S$ изображает определенный спин-тензор, зависящий лишь от исходного спин-тензора, но не от специального выбора изображающего его полинома. Каждый спинор и каждый коспинор является симметрическим спин-тензором (валентности (1, 0), соответственно (0, 1)); в самом деле, в этих случаях единственно возможными подстановками α, $\dot\beta$ являются тождественные ($k \to k$), так что условие (9.4) выполнено. Симметрическим спин-тензором валентности (2, 0) является, например, $\xi\otimes\xi' + \xi'\otimes\xi$.

Компоненты спин-тензора, заданные формулой (4.12), под действием оператора $P_{\alpha\dot\beta}$ изменяются по простому правилу:

$$(P_{\alpha\dot\beta}S)^{\nu_1\ldots\nu_r}_{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_s} = S^{\alpha^{-1}(\nu_1\ldots\nu_r)}_{\dot\beta^{-1}(\dot\mu_1\ldots\dot\mu_s)}; \qquad (9.5)$$

например, в рассмотренном выше случае

$$(P_{\alpha\dot\beta}S)^{2341}_{\dot2\dot1\dot3} = S^{2134}_{\dot3\dot2\dot1},$$

так как обратные подстановки α^{-1}, $\dot\beta^{-1}$ переводят (2 3 4 1) в (2 1 3 4) и $(\dot2\ \dot1\ \dot3)$ в $(\dot3\ \dot2\ \dot1)$. Поэтому симметричность спин-тензора S может быть определена также с помощью компонент: спин-тензор S называется симметрическим, если компоненты его не меняются при любой подстановке верхних и (отдельно) нижних индексов. Теперь уже нетрудно сосчитать размерность пространства симметрических спин-тензоров валентности (r, s). Так как значение компоненты $S^{\nu_1\ldots\nu_r}_{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_s}$ зависит лишь от состава индексов $\nu_1\ldots\nu_r$ (соответственно $\dot\mu_1\ldots\dot\mu_s$), но не от их порядка, то независимые компоненты характеризуются *числами заполнения*, указывающими, сколько единиц и двоек имеется среди $\nu_1\ldots\nu_r$, $\dot\mu_1\ldots\dot\mu_s$. Достаточно указать число единиц в обоих случаях, принимающее значения $n=0, 1, \ldots, r$ (соответственно $\dot m=0, 1, \ldots, s$).

Приняв независимые компоненты за координаты в пространстве симметрических спин-тензоров валентности (r, s) и обозначив это пространство через V^r_s, имеем следующую формулу для его размерности:

$$\dim V^r_s = (r+1)(s+1). \qquad (9.6)$$

Метрика в пространствах спин-тензоров. Выбор базиса в S^r_s определяется соображениями, относящимися не только к группе $SL(2)$, но и к группе $SU(2)$, представления которой мы будем искать одновременно с представлениями $SL(2)$. При определении группы $SU(2)$ использовалось «внутреннее» скалярное произведение $\langle | \rangle$ (см. (3.44)) в пространстве спиноров и соответственно в пространстве коспиноров. Мы покажем, что такие «внутренние» произведения позволяют естественным образом определить эрмитово скалярное произведение в V_s^r и построить там ортонормированный базис. Базис такого рода будет особенно удобен для изучения представлений $SU(2)$; как мы увидим, тот же базис естественно связан и с представлениями $SL(2)$, хотя в этом случае нормировка базисных векторов и несущественна.

Итак, пусть заданы эрмитовы скалярные произведения для спиноров и коспиноров: $\langle \xi' \mid \xi'' \rangle$, $\langle \dot\eta' \mid \dot\eta'' \rangle$. Поскольку скалярное произведение для спин-тензоров должно быть линейно относительно второго сомножителя и антилинейно относительно первого, достаточно задать его для пары *мономов*; положим

$$\langle \overset{(1)}{\xi} \otimes \ldots \otimes \overset{(r)}{\xi} \otimes \underset{(1)}{\dot\eta} \otimes \ldots \otimes \underset{(s)}{\dot\eta} \mid \overset{(1)}{\zeta} \otimes \ldots$$
$$\ldots \otimes \overset{(r)}{\zeta} \otimes \underset{(1)}{\dot\vartheta} \otimes \ldots \otimes \underset{(s)}{\dot\vartheta} \rangle = \prod_{k=1}^{r} \langle \overset{(k)}{\xi} \mid \overset{(k)}{\zeta} \rangle \prod_{l=1}^{s} \langle \underset{(l)}{\dot\eta} \mid \underset{(l)}{\dot\vartheta} \rangle. \tag{9.7}$$

Так как любой спин-тензор валентности (r, s) является суммой мономов, то этим задается и скалярное произведение *любых* спин-тензоров S, T той же валентности, линейное относительно второго множителя и антилинейное относительно первого; достаточно записать S, T в виде суммы мономов S_i, T_j и положить

$$\langle S \mid T \rangle = \sum_{i,\, j} \langle S_i \mid T_j \rangle. \tag{9.8}$$

В частности, для базисных спин-тензоров

$$\varepsilon^{\dot\lambda_1 \ldots \dot\lambda_s}_{\nu_1 \ldots \nu_r} = \overset{(1)}{\varepsilon}_{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \overset{(r)}{\varepsilon}_{\nu_r} \otimes \underset{(1)}{\varepsilon}{}^{\dot\lambda_1} \otimes \ldots \otimes \underset{(s)}{\varepsilon}{}^{\dot\lambda_s} \tag{9.9}$$

(ср. (4.13)) имеем

$$\left\langle \varepsilon^{\dot\mu_1 \dots \dot\mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_r} \middle| \varepsilon^{\dot\varkappa_1 \dots \dot\varkappa_s}_{\lambda_1 \dots \lambda_r} \right\rangle = \delta_{\nu_1\lambda_1} \dots \delta_{\nu_r\lambda_r} \delta^{\dot\mu_1\dot\varkappa_1} \dots \delta^{\dot\mu_s\dot\varkappa_s}, \qquad (9.10)$$

откуда находится выражение скалярного произведения в компонентах:

$$\langle S \mid T \rangle = \sum_{\mu, \nu} \bar S^{\nu_1 \dots \nu_r}_{\dot\mu_1 \dots \dot\mu_s} T^{\nu_1 \dots \nu_r}_{\dot\mu_1 \dots \dot\mu_s}. \qquad (9.11)$$

Из способа построения скалярного произведения (9.7), (9.8) ясно, что оно не зависит ни от специального представления S, T в виде полиномов (так как не меняется при элементарных преобразованиях), ни от выбора базиса (так как базис вообще не участвует в определении (9.7), (9.8)). С другой стороны, из (9.11) видно, что $\langle S \mid S \rangle > 0$ при $S \neq 0$; следовательно, построенное нами скалярное произведение спин-тензоров *эрмитово.*

Введение эрмитова скалярного произведения превращает S^r_s в *комплексное евклидово пространство* размерности 2^{r+s} (иногда комплексные векторные пространства с эрмитовым скалярным произведением называются также *гильбертовыми* пространствами, другие же авторы сохраняют последний термин лишь для бесконечномерного случая).

Базисные спин-тензоры (9.9) составляют, в силу (9.10), ортонормированный базис в пространстве S^r_s всех спин-тензоров валентности (r, s). Однако эти спин-тензоры не симметричны. Чтобы получить базис для симметрических спин-тензоров, мы подвергнем спин-тензоры (9.9) *симметризации.* Применим к полиному (9.1) операторы $P_{\alpha\beta}$ со всевозможными подстановками α, β и сложим полученные мономы; полученный полином разделим, для упрощения дальнейших формул, на число его членов $r!\,s!$. Тем самым мы вводим оператор

$$P = \frac{1}{r!\,s!} \sum_{\alpha, \beta} P_{\alpha\beta}, \qquad (9.12)$$

называемый *оператором симметризации.* Легко видеть, что этот оператор переводит любой спин-тензор в симметрический; в самом деле, если применить к PS оператор перестановки $P_{\gamma\delta}$, то имеем $P_{\gamma\delta}P_{\alpha\beta}=P_{\alpha\gamma,\beta\delta}$, откуда

$$P_{\gamma\delta}PS=\frac{1}{r!s!}\sum_{\alpha,\beta}P_{\gamma\delta}P_{\alpha\beta}S=\frac{1}{r!s!}\sum_{\alpha,\beta}P_{\alpha\gamma,\beta\delta}S;$$

подстановки $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ с фиксированными γ, δ пробегают здесь всевозможные подстановки из r (соответственно s) чисел, и правая часть совпадает с PS.

Далее для симметрического спин-тензора S имеем $PS=S$; в самом деле, в этом случае $P_{\alpha\beta}S=S$ для всех α, β, причем сумма в (9.12) содержит столько членов, сколько есть пар подстановок (α, β), т. е. $r!\,s!$; отсюда и вытекает сделанное утверждение, а заодно и объяснение множителя в (9.12).

Обозначим теперь через V_s^r пространство всех *симметрических* спин-тензоров валентности r, s. Чтобы построить базис в V_s^r, выберем в $\mathbb{C}^2$, $\dot{\mathbb{C}}^2$ ортонормированные дуальные базисы (ε_μ), $(\varepsilon^{\dot\mu})$ и построим из них спин-тензоры (9.9), а затем подвергнем эти последние действию оператора P; полученные симметрические спин-тензоры

$$P\varepsilon^{\dot\mu_1\ldots\dot\mu_s}_{\nu_1\ldots\nu_r}, \tag{9.13}$$

как мы покажем, составляют базис в V_s^r. Покажем сначала, что любой симметрический спин-тензор S разлагается по спин-тензорам (9.13). Для этого разложим S по базису (9.9) и применим к обеим частям разложения оператор P; так как $PS=S$, получаем требуемое разложение. Чтобы доказать линейную независимость системы (9.13), достаточно установить ее ортогональность. Если два полинома (9.13) различаются составом индексов, то вычисление их скалярного произведения вследствие (9.8) сводится к скалярному умножению мономов (9.9), различающихся хотя бы одним множителем; но такие произведения равны нулю в силу (9.7).

Остается *нормировать* базисные спин-тензоры (9.13). Пусть числа заполнения, соответствующие (9.13), равны n и $\dot m$, т. е. среди индексов ν имеется n единиц и $r-n$ двоек, и среди индексов $\dot\mu$ имеется $\dot m$ единиц и $s-\dot m$ двоек. После деления на $n!\,(r-n)!\,\dot m!\,(s-\dot m)!$ и умножения на $r!\,s!$ базисный вектор (9.13) превращается в сумму $\varepsilon(n,\dot m)$ мономов (9.9) с одним и тем же составом индексов (т. е. одинаковым числом единиц и двоек сверху и снизу), но с различным расположением их. По этой последней причине все члены $\varepsilon(n,\dot m)$ ортогональны друг другу, и скалярный квадрат $\varepsilon(n,\dot m)$ равен, тем самым, числу членов (ср. (9.7)), т. е. $C_r^n C_s^{\dot m}$. Поэтому *нормированный* вектор базиса есть

$$\Phi_{n\dot m}=\frac{1}{\sqrt{C_r^nC_s^{\dot m}}}\,\varepsilon(n,\dot m)=\frac{\sqrt{n!\,(r-n)!\,\dot m!\,(s-\dot m)!}}{\sqrt{r!\,s!}}\,\varepsilon(n,\dot m),\qquad(9.14)$$

или, что то же,

$$\Phi_{n\dot m}=\frac{\sqrt{r!\,s!}}{\sqrt{n!\,(r-n)!\,\dot m!\,(s-\dot m)!}}\,P\varepsilon^{\dot\beta_1\ldots\dot\beta_s}_{\nu_1\ldots\nu_r}.\qquad(9.15)$$

Представления группы $SL(2)$ симметрическими спин-тензорами. Теперь мы можем определить неприводимые представления бинарной группы, о которых уже была речь в § 7. Согласно общему определению спин-тензорных представлений оператор U, соответствующий в представлении бинарной матрице u, действует на моном по правилу (4.16). Подвергнем моном действию оператора $P_{\alpha\beta}$; тогда, очевидно, и в правой части (4.16) произойдет такая же перестановка множителей и, следовательно, в применении к мономам имеем

$$UP_{\alpha\beta}=P_{\alpha\beta}U.\qquad(9.16)$$

Поскольку операторы U и $P_{\alpha\beta}$ линейны, обе части (9.16) одинаково действуют на *любой* спин-тензор, т. е. (9.16) справедливо как равенство операторов. Отсюда для всех матриц u из $SL(2)$ имеем

$$UP=PU.\qquad(9.17)$$

Поэтому операторы представления U переводят симметрические спин-тензоры опять в симметрические: если $PS=S$, то $P(US)=U(PS)=US$. Полученное представление группы $SL(2)$ в пространстве V_s^r всех симметрических спин-тензоров валентности (r, s) обозначается через (j, j'), где $2j=r$, $2j'=s$. Это и есть те представления, на которые мы ссылались в § 7. Легко убедиться, что все представления (j, j') точны; достаточно для любых двух бинарных матриц $u \neq u'$ найти симметрический спин-тензор S, переводимый соответствующими операторами U, U' в разные спин-тензоры. Мы примем без доказательства, что (j, j') *образуют полную систему неприводимых представлений* (см. § 7).

Правило вычисления матриц неприводимых представлений. Сейчас мы изложим алгебраический прием, позволяющий вычислить для всех бинарных матриц u соответствующие им в представлениях (j, j') матрицы $D^{(j, j')}[u]$. Для этого мы фиксируем базис в пространстве спиноров. Тем самым однозначно задаются базисы (9.9) во всех спин-тензорных пространствах S^r_s и базисы (9.15) в пространствах симметрических спин-тензоров. Это дает возможность вести вычисления в компонентах. Для упрощения записей мы рассмотрим в дальнейшем только представления типа $(j, 0)$; переход к общему случаю не требует каких-либо новых идей, а представления типа $(0, j')$, как будет ясно из дальнейшего, получаются по формулам, очень просто связанным с приводимыми в тексте.

Общее правило (4.19), задающее представление в компонентах спин-тензоров, при $j'=0$ имеет вид

$$S'^{\nu_1 \dots \nu_r} = u^{\nu_1}_{\varkappa_1} u^{\nu_2}_{\varkappa_2} \dots u^{\nu_r}_{\varkappa_r} S^{\varkappa_1 \dots \varkappa_r}. \tag{9.18}$$

То же правило применяется, в частности, к интересующим нас симметрическим спин-тензорам. Но для симметрических спин-тензоров надо учесть совпадения коэффициентов и выбор ортонормированного базиса (9.15). Пусть $S^{\nu_1 \dots \nu_r}$ — одна из компонент симметрического спин-тензора S в базисе

$$\varepsilon_{\nu_1 \dots \nu_r} = \varepsilon_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon_{\nu_r} \tag{9.19}$$

пространства всех спин-тензоров валентности $(r, 0)$. Пусть среди индексов ν содержится n единиц и $r-n$ двоек. Обозначим через f^n компоненту того же симметрического спин-тензора S по отношению к базисному спин-тензору $\Phi(n)$ пространства симметрических спин-тензоров, соответствующему этому же числу n (здесь $s=0$, $\dot{m}=0$ и Φ_n заменяет $\Phi_{n\dot{m}}$). Тогда, как легко видеть из (9.14),

$$f_n = \frac{\sqrt{r!}}{\sqrt{n!(r-n)!}} S^{\nu_1 \ldots \nu_r}. \tag{9.20}$$

Рассмотрим моном вида

$$\overset{(1)}{\xi} \otimes \overset{(2)}{\xi} \otimes \ldots \otimes \overset{(r)}{\xi}, \tag{9.21}$$

разложение которого по базису пространства V_0^r имеет вид

$$\overset{(1)}{\xi}{}^{\nu_1} \ldots \overset{(r)}{\xi}{}^{\nu_r} e_{\nu_1} \otimes \ldots \otimes e_{\nu_r}, \quad S^{\nu_1 \ldots \nu_r} = \overset{(1)}{\xi}{}^{\nu_1} \ldots \overset{(r)}{\xi}{}^{\nu_r}. \tag{9.22}$$

При подстановке

$$\xi'^{\nu} = u^{\nu}_{\varkappa} \xi^{\varkappa} \tag{9.23}$$

произведения $\overset{(1)}{\xi}{}^{\nu_1} \ldots \overset{(r)}{\xi}{}^{\nu_r}$ преобразуются по тому же закону (9.18), что и компоненты общего спин-тензора S. Если теперь моном (9.21) симметричен, т. е. $\overset{(1)}{\xi} = \overset{(2)}{\xi} = \ldots = \overset{(r)}{\xi}$, то его компоненты являются произведениями вида

$$(\xi^1)^n (\xi^2)^{r-n}, \tag{9.24}$$

где n — число единиц и $r-n$ — число двоек среди индексов $\nu_1 \ldots \nu_r$; естественно ожидать, что при подстановке (9.23) произведения (9.24) будут преобразовываться подобно компонентам f^n симметрического спин-тензора. Это подтверждается следующим вычислением.

Возьмем одну из компонент симметрического спин-тензора S', например

$$S'^{\overbrace{1\ldots1}^{n}\overbrace{2\ldots2}^{r-n}} = \frac{\sqrt{n!(r-n)!}}{\sqrt{r!}} f'^n. \tag{9.25}$$

Согласно правилу представления (9.18)

$$S'^{\overbrace{1\ldots1}^{n}\overbrace{2\ldots2}^{r-n}} = u^1_{\varkappa_1} \ldots u^1_{\varkappa_n} u^2_{\varkappa_{n+1}} \ldots u^2_{\varkappa_r} S^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_r}.$$

Выделим в правой части члены, в которых m индексов равны единице и $r-m$ — двойке. Все соответствующие компоненты

$$S^{\varkappa_1 \ldots \varkappa_r} = \frac{\sqrt{m!\,(r-m)!}}{\sqrt{r!}} f^m,$$

откуда получается закон преобразования компонент симметрических спин-тензоров

$$\sqrt{n!\,(r-n)!}\, f'^n = \\ = \sum_m \left(\sum u^1_{\varkappa_1} \ldots u^1_{\varkappa_n} u^2_{\varkappa_{n+1}} \ldots u^2_{\varkappa_r}\right) \sqrt{m!\,(r-m)!}\, f^m; \qquad (9.26)$$

внутреннее суммирование производится здесь по всем наборам $(\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_r)$, содержащим m единиц и $r-m$ двоек.

С другой стороны, в разложении

$$(\xi'^1)^n (\xi'^2)^{r-n} = (u^1_1 \xi^1 + u^1_2 \xi^2)^n (u^2_1 \xi^1 + u^2_2 \xi^2)^{r-n} \qquad (9.27)$$

коэффициент при $(\xi^1)^m (\xi^2)^{r-m}$ в точности равен внутренней сумме в правой части (9.26). Следовательно, *компоненты симметрических спин-тензоров относительно ортонормированного базиса преобразуются так же, как произведения*

$$\frac{(\xi^1)^n (\xi^2)^{r-n}}{\sqrt{n!\,(r-n)!}} \qquad (9.28)$$

под действием бинарной подстановки (9.23).

Для приложений удобно переменить нумерацию базисных векторов в пространстве представления. Положим $j=r/2$,

$$\sigma = n - j = n - r/2 \qquad (-j \leqslant \sigma \leqslant j); \qquad (9.29)$$

тогда базисные спин-тензоры (9.15) (с одним индексом, так как $s=0$) получают новую нумерацию целыми или полуцелыми индексами:

$$\Phi_{-j},\ \Phi_{-j+1},\ \ldots,\ \Phi_{j-1},\ \Phi_j, \qquad (9.30)$$

а соответствующие компоненты f_σ преобразуются так же, как

$$\frac{(\xi^1)^{j+\sigma}(\xi^2)^{j-\sigma}}{\sqrt{(j+\sigma)!\,(j-\sigma)!}}. \tag{9.31}$$

Наконец, обозначим пространство представления V_0^r через V^{2j+1}, где верхний индекс, равный числу базисных векторов (9.30), означает уже не валентность спин-тензоров, а размерность заданного ими представления. Теперь мы располагаем всем необходимым для вычисления матриц представления $D^{(j)}[u]$.

В общем случае представления в пространстве V_s^r для нумерации базисных спин-тензоров (9.15) полагают $r=2j$, $s=2j'$; тогда базис имеет вид

$$\Phi_{\sigma\dot{\sigma}} \tag{9.32}$$

$$(\sigma=-j,\ -j+1,\ \ldots,\ j-1,\ j;$$
$$\dot{\sigma}=-j',\ -j'+1,\ \ldots,\ j'-1,\ j'),$$

а компоненты симметрических спин-тензоров $f_{\sigma\dot{\sigma}}$ относительно этого базиса преобразуются, как полиномы

$$\frac{(\xi^1)^{j+\sigma}(\xi^2)^{j-\sigma}(\eta_{\dot{1}})^{j'+\dot{\sigma}}(\eta_{\dot{2}})^{j'-\dot{\sigma}}}{\sqrt{(j+\sigma)!\,(j-\sigma)!\,(j'+\dot{\sigma})!\,(j'-\dot{\sigma})!}} \tag{9.33}$$

при подстановках

$$\xi'^{\nu}=u^{\nu}_{\chi}\xi^{\chi}, \quad \eta'_{\dot{\lambda}}=(\bar{u}^{-1})^{\dot{\chi}}_{\dot{\lambda}}\eta_{\dot{\chi}}. \tag{9.34}$$

Размерность представления равна числу (ортонормированных) базисных спин-тензоров (9.32), т. е. $(2j+1)\times\times(2j'+1)$, где j, j' — любые целые или полуцелые числа.

Из (9.34) легко следует соотношение между матрицами представлений $(j,\ 0)$, $(0,\ j)$:

$$D^{(0,\,j)}[u]=\overset{+}{D}{}^{(j,\,0)}[u^{-1}]=$$
$$=D^{(j,\,0)}[C]\,\overline{D^{(j,\,0)}[u]}\,D^{(j,\,0)}[C]^{-1}. \tag{9.35}$$

Можно показать, что пространства представлений V_0^j, V_j^0 связаны невырожденным скалярным произведением $(\chi \mid \psi)$, подобно пространствам спиноров и коспиноров, причем для всех матриц u

$$(D^{(0,\,j)}[u]\chi \mid D^{(j,\,0)}[u]\psi) = (\chi \mid \psi). \qquad (9.36)$$

Развитый здесь аппарат спин-тензорных представлений принадлежит Э. Картану.

Представления группы $SU(2)$. Если, в частности, брать матрицы u лишь из подгруппы $SU(2)$, то из представлений $(j,\ j')$ получаются представления группы $SU(2)$ тех же размерностей. Эти представления, вообще говоря, приводимы, но неприводимы в случаях $(j,\ 0)$, $(0,\ j)$. Важно заметить, что по отношению к построенному выше скалярному произведению спин-тензоров $\langle\mid\rangle$ эти представления группы $SU(2)$ *унитарны*, т. е. для унитарных матриц r

$$\langle D^{(j,\,j')}[r]S \mid D^{(j,\,j')}[r]T\rangle = \langle S \mid T\rangle. \qquad (9.37)$$

Чтобы доказать (9.37), заметим, что в силу определения спин-тензорных представлений (4.16) и определения скалярного произведения (9.7), (9.8) левая часть (9.37) получается из правой, если в каждом мономе полиномов S и T заменить спинорные множители ξ на $u\xi$ и коспинорные множители $\dot{\eta}$ на $\dot{u}^{-1}\dot{\eta}$. Так как r унитарна, $\dot{r}^{-1}\dot{\eta} = r\dot{\eta}$; все скалярные произведения в правой части (9.7) сохраняются под действием унитарных преобразований r, откуда и следует (9.37).

Напомним, что скалярные произведения в пространствах спин-тензоров и нормировка базисов нужны были именно для того, чтобы обеспечить *унитарность* представлений $(j,\ j')$, суженных до подгруппы $SU(2)$. Унитарный характер представлений $SU(2)$ весьма важен в приложениях к физике.

Можно показать, что только что описанные *представления* $D^{(j)}[r] = D^{(j,\,0)}[r]$ *образуют полную систему неприводимых представлений группы* $SU(2)$. Таким образом, для описания представлений группы $SU(2)$, в отличие от содержащей ее группы $SL(2)$, нет надобности в «коспинорных» представлениях.

Заметим еще, что *представления* $(j,\ j')$ *группы* $SL(2)$ *не унитарны*. Это не случайно: группа $SL(2)$, как и группа Пуанкаре, вообще не имеет конечномерных унитарных представлений, за исключением тривиального одномерного, в котором всем матрицам u соответствует число 1. Бесконечномерные унитарные представления группы Пуанкаре очень важны для физики и будут построены во второй части книги; что касается группы $SL(2)$, то ее унитарные представления нам не понадобятся.

Матричные элементы представлений. Покажем, как вычисляются элементы представляющих матриц (опять ограничиваясь случаем $(j, 0)$).

Пусть данной матрице $u=(u_\mu^\nu)$ соответствует матрица $U=D^{(j)}[u]$, задающая линейное преобразование

$$f'_\sigma = \sum_{\tau=-j}^{j} U_{\sigma\tau} f_\tau. \tag{9.38}$$

Тогда закон преобразования (9.38) совпадает с законом преобразования выражений (9.31), т. е.

$$\frac{(u_1^1\xi^1 + u_2^1\xi^2)^{j+\sigma}(u_1^2\xi^1 + u_2^2\xi^2)^{j-\sigma}}{\sqrt{(j+\sigma)!\,(j-\sigma)!}} = \sum_{\tau=-j}^{j} U_{\sigma\tau}\frac{(\xi^1)^{j+\tau}(\xi^2)^{j-\tau}}{\sqrt{(j+\tau)!\,(j-\tau)!}}. \tag{9.39}$$

Введем переменную $x=\xi^1/\xi^2$ и перепишем последнюю формулу в виде

$$(u_1^1 x + u_2^1)^{j+\sigma}(u_1^2 x + u_2^2)^{j-\sigma} = \sum_{\tau=-j}^{j}\sqrt{\frac{(j+\sigma)!\,(j-\sigma)!}{(j+\tau)!\,(j-\tau)!}}\,U_{\sigma\tau}x^{j+\tau},$$

откуда

$$U_{\sigma\tau} = \sqrt{\frac{(j+\tau)!\,(j-\tau)!}{(j+\sigma)!\,(j-\sigma)!}}\left\{\frac{1}{(j+\tau)!}\frac{d^{j+\tau}}{dx^{j+\tau}}\times\right.$$
$$\left.\times\left[(u_1^1 x + u_2^1)^{j+\sigma}(u_1^2 x + u_2^2)^{j-\sigma}\right]\right\}_{x=0}. \tag{9.40}$$

Выполнив дифференцирование произведения по формуле Лейбница и подставив $x=0$, имеем

$$U_{\sigma\tau}=\sqrt{(j+\sigma)!\,(j-\sigma)!\,(j+\tau)!\,(j-\tau)!}\times$$
$$\times\sum_{l=\max(0,\,\sigma+\tau)}^{\min(j+\sigma,\,j+\tau)}\frac{(u_1^1)^l}{l!}\,\frac{(u_2^1)^{j+\sigma-l}}{(j+\sigma-l)!}\,\frac{(u_1^2)^{j+\tau-l}}{(j+\tau-l)!}\times$$
$$\times\frac{(u_2^2)^{l-\sigma-\tau}}{(l-\sigma-\tau)!}. \qquad (9.41)$$

Заметим для дальнейшего, что элементы представляющей матрицы $U_{\sigma\tau}$ являются однородными функциями степени $2j$ от элементов исходной матрицы u.

Представление матриц Паули. Начнем с представления матриц Паули, порождающих алгебру Ли группы $SU(2)$. Для вычисления представляющих матриц составим однопараметрические подгруппы $\{e^{i\vartheta\sigma_k}\}$ (см. (8.10)) и построим соответствующие им в представлении подгруппы (8.17). Пользуясь разложением (8.18) и вычисляя с точностью первого порядка, имеем для $k=1$: $u=1+i\vartheta\sigma_1$, т. е. $u_1^1=u_2^2=1$, $u_2^1=u_1^2=i\vartheta$. Внося эти значения в (9.41), достаточно найти лишь члены первого порядка по ϑ. Они получаются при $j+\sigma-l=0$, $j+\tau-l=1$ и при $j+\sigma-l=1$, $j+\tau-l=0$, так что в матрице $(A_{\sigma\tau})$ отличны от нуля лишь элементы с $\tau=\sigma\pm1$. Проведя аналогичные выкладки для σ_2, σ_3, находим матрицы I_k, соответствующие $\frac{1}{2}\sigma_k$ $\Big($множитель $\frac{1}{2}$ вводится для упрощения перестановочных соотношений$\Big)$:

$$(I_1)_{\sigma\tau}=\frac{1}{2}\Big\{\delta_{\sigma-1,\,\tau}\sqrt{(j+\sigma)(j-\sigma+1)}+$$
$$+\delta_{\sigma+1,\,\tau}\sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)}\Big\},$$
$$(I_2)_{\sigma\tau}=\frac{1}{2i}\Big\{\delta_{\sigma-1,\,\tau}\sqrt{(j+\sigma)(j-\sigma+1)}- \qquad (9.42)$$
$$-\delta_{\sigma+1,\,\tau}\sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)}\Big\},$$
$$(I_3)_{\sigma\tau}=\delta_{\sigma\tau}\cdot\sigma.$$

Заметим, что матрицы (9.42) *эрмитовы*, в соответствии с тем фактом, что подгруппа $SU(2)$ представляется *унитарно*. Особо простое выражение I_3 связано с неравноправием осей, с самого начала присутствовавшим в построении спинорных представлений (см. (5.2)).

Представляющие матрицы для образующих $1/2\ \tau_k$ получаются совершенно аналогично; обозначим их через I'_k:

$$I'_k = iI_k \qquad (k = 1,\ 2,\ 3). \tag{9.43}$$

Представление вращений и бустов. Представляющие матрицы для элементов группы $SL(2)$ можно теперь получить по формуле (8.19). Рассмотрим однопараметрическую подгруппу, накрывающую вращения вокруг оси $\boldsymbol{n}$:

$$r(\vartheta) = e^{i\vartheta(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})} = \cos\vartheta + i(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\sin\vartheta \tag{9.44}$$

(ср. (5.16)). Тогда, согласно (8.19), в представлении $D^{(j)}$ имеем

$$R^{(j)}(\vartheta) = e^{2i\vartheta(\boldsymbol{n}\boldsymbol{I})}. \tag{9.45}$$

Аналогично для бустов

$$b(\vartheta) = e^{i\vartheta(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\tau})} = \operatorname{ch}\vartheta - (\boldsymbol{n}\boldsymbol{\tau})\operatorname{sh}\vartheta \tag{9.46}$$

имеем представляющие матрицы

$$B^{(j)}(\vartheta) = e^{2i\vartheta(\boldsymbol{n}\boldsymbol{I}')}. \tag{9.47}$$

Представление некоторых специальных матриц. Нам понадобятся в дальнейшем матрицы, представляющие две матрицы специального вида. Первая из них — матрица

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ср. (3.19)). Эта матрица принадлежит $SU(2)$, и подстановка в (9.39) $u_1^1 = u_2^2 = 0$, $u_2^1 = 1$, $u_1^2 = -1$ даст

$$C_{\sigma\tau}^{(j)} = (-1)^{j+\tau}\delta_{\sigma,-\tau}. \tag{9.48}$$

Рассмотрим далее матрицу $\tilde{p}$, изображающую вектор $p = m\left(\operatorname{ch}\frac{\vartheta}{2}e_0 + \operatorname{sh}\frac{\vartheta}{2}e_1 + \operatorname{sh}\frac{\vartheta}{2}e_2 + \operatorname{sh}\frac{\vartheta}{2}e_3\right)$, $m > 0$:

$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} p_0 + p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & p_0 - p_3 \end{pmatrix}. \tag{9.49}$$

Эта матрица не унимодулярна; мы можем, однако, найти представляющие ее матрицы, расширив $D^{(j)}$ до представления любых матриц второго порядка. В самом деле, формула (9.39) может быть применена независимо от предположения, что $\det u = 1$. В силу (5.21), $\tilde{p} = mb(p)\, b^{+}(p) = mb(p)^2$, и в представлении $D^{(j)}$ получаем матрицу

$$\Pi^{(j)} = m^{2j} B^{(j)}(p)^2, \tag{9.50}$$

где $B^{(j)}(p)$ представляет буст $b(p)$. Матричные элементы $\Pi^{(j)}$ нетрудно получить из (9.41). Для наших целей достаточно заметить, что матричные элементы $\Pi^{(j)}_{\sigma\tau}$ суть однородные функции степени $2j$ от компонент импульса p_α.

«Повышающие» и «понижающие» операторы группы $SL(2)$. Рассмотрим теперь неприводимое представление $D^{(j,j')}$ группы $SL(2)$ в пространстве $V^{(2j+1)(2j'+1)}$. В этом представлении матрицы алгебры Ли σ_k, τ_k изображаются операторами, которые мы обозначим, как и в случае четырехмерного представления в пространстве Минковского, через $2M_k$, $2K_k$ (ср. (8.12)). Положим еще

$$A_k = \frac{1}{2}(M_k + iK_k), \quad B_k = \frac{1}{2}(M_k - iK_k) \quad (k = 1, 2, 3)^{1)}. \tag{9.51}$$

Тогда для операторов A_k, B_k получаются особенно простые перестановочные соотношения:

$$\begin{gathered} [A_1, A_2] = iA_3, \quad [A_2, A_3] = iA_1, \quad [A_3, A_1] = iA_2, \\ [B_1, B_2] = iB_3, \quad [B_2, B_3] = iB_1, \quad [B_3, B_1] = iB_2, \\ [A_k, B_l] = 0 \qquad (k, l = 1, 2, 3). \end{gathered} \tag{9.52}$$

---

[1]) При $j' = 0$, в частности, $A_k = 0$ (ср. (9.43)).

Образующие A_k, а также B_k, в отдельности имеют такие же перестановочные соотношения, как I_k. Заметим, что матрицы iK_k, как нетрудно показать, эрмитовы (в базисе $\Phi_{\sigma\dot\sigma}$); тем самым эрмитовы все матрицы A_k, B_k. Однако эти матрицы не принадлежат представлению алгебры Ли, так как получаются из представляющих матриц M_k, K_k с помощью *комплексных* линейных комбинаций. Система всевозможных комплексных комбинаций элементов алгебры Ли называется ее *комплексной оболочкой*.

Положим

$$\begin{aligned} A_+ &= A_1 + iA_2, & A_- &= A_1 - iA_2, \\ B_+ &= B_1 + iB_2, & B_- &= B_1 - iB_2. \end{aligned} \tag{9.53}$$

Как нетрудно проверить с помощью (9.33), базисные векторы $\Phi_{\sigma\dot\sigma}$ представления $D^{(j,\,j')}$ являются собственными векторами операторов A_3, B_3:

$$A_3\Phi_{\sigma\dot\sigma} = \dot\sigma\Phi_{\sigma\dot\sigma}, \qquad B_3\Phi_{\sigma\dot\sigma} = \sigma\Phi_{\sigma\dot\sigma}, \tag{9.54}$$

между тем как операторы $A_\pm$, $B_\pm$ преобразуют их по формулам

$$\begin{aligned} A_-\Phi_{\sigma\dot\sigma} &= \sqrt{(j'+\dot\sigma)(j'-\dot\sigma+1)}\,\Phi_{\sigma,\,\dot\sigma-1} \quad (\dot\sigma > -j'), \\ A_+\Phi_{\sigma\dot\sigma} &= \sqrt{(j'-\dot\sigma)(j'+\dot\sigma+1)}\,\Phi_{\sigma,\,\dot\sigma+1} \quad (\dot\sigma < j'), \\ A_-\Phi_{\sigma,\,-j'} &= 0, \quad A_+\Phi_{\sigma,\,j'} = 0, \\ B_-\Phi_{\sigma\dot\sigma} &= \sqrt{(j+\sigma)(j-\sigma+1)}\,\Phi_{\sigma-1,\,\dot\sigma} \quad (\sigma > -j), \\ B_+\Phi_{\sigma\dot\sigma} &= \sqrt{(j-\sigma)(j+\sigma+1)}\,\Phi_{\sigma+1,\,\dot\sigma}\,(\sigma < j), \\ B_-\Phi_{-j,\,\dot\sigma} &= 0, \quad B_+\Phi_{j,\,\sigma} = 0. \end{aligned} \tag{9.55}$$

Часть II
КВАНТОВАННЫЕ ПОЛЯ

§ 10. Операторы теории поля

Происхождение основных понятий. В классической динамике, гамильтонова форма которой сыграла особенно важную роль в истории квантовой механики, состояние движения динамической системы описывается конечным числом «динамических переменных» q_i, p_i $(i=1, \ldots, n)$; это значит, что движение системы полностью определяется функциями от времени $q_i(t)$, $p_i(t)$. Для определения этих функций служат уравнения Гамильтона, составленные по заданному классическому гамильтониану $H(q_i, p_i, t)$.

Будем считать, что координаты q_i полностью задают положение системы по отношению к выбранной системе отсчета; это значит, что среди q_i должны быть координаты, фиксирующие положение системы в целом в каждый момент времени, например координаты центра инерции системы и углы, задающие вращение системы относительно осей системы отсчета. Тогда, если подвергнуть систему в целом преобразованиям Галилея, мы получаем соответствующую группу преобразований фазового пространства системы. Известно, что из этих преобразований выводятся «законы сохранения» для некоторых динамических функций от q_i, p_i (теорема Нётер).

Главное отличие квантовой механики от классической состоит в том, что *динамические переменные из чисел превращаются в операторы*, действующие на некотором гильбертовом пространстве. В связи с этим происходит своеобразное разделение ролей между различными частями математического аппарата. Состояние движения системы задается уже не набором чисел (q_i, p_i), а вектором указанного гильбертова пространства. Если исходить из «картины Гейзенберга», более подходящей для наших целей, то «вектор состояния» должен рассматриваться как полное описание движения системы (от $t=-\infty$ до $t=\infty$), аналогичное полной фазовой траектории ($q_i(t)$, $p_i(t)$) классической механики.

С другой стороны, динамические переменные $q_i(t)$, $p_i(t)$ (для системы с постоянным числом частиц) превращаются в операторы, зависящие от времени и определяемые из «квантовых уравнений Гамильтона» и перестановочных соотношений Гейзенберга—Борна. Эти последние представляют собой новый важный закон природы, выражающий некоммутативность квантовых динамических переменных. Действительности классических динамических переменных соответствует эрмитовость квантовых, т. е. действительность их собственных значений и средних значений. Эти значения и описывают измеряемые на опыте характеристики системы в любой момент времени.

Векторы состояния обычно реализуются в виде функций $\psi(q_i, t)$, удовлетворяющих уравнению Шредингера. Отметим, что в гейзенберговой картине вектор состояния есть функция от $n+1$ переменных, включая время (а не меняющаяся со временем функция от q_i, как в картине Шредингера). Преобразования Галилея вызывают соответствующие преобразования векторов состояния, т. е. существует *линейное представление группы Галилея* в гильбертовом пространстве состояний системы. Поскольку преобразования группы должны сохранять скалярные произведения, выражающие вероятности квантовых переходов, это представление должно быть унитарным. Поэтому алгебра Ли группы Галилея представляется в пространстве состояний эрмитовыми операторами, которые называются *наблюдаемыми* группы Галилея. К их числу относятся проекции импульса и момента системы, соответствующие сдвигам и вращениям, а также оператор энергии, соответствующий временным сдвигам. Динамические переменные, со своей стороны, также подвергаются преобразованиям группы Галилея, и эти преобразования определенным образом связаны с преобразованиями векторов состояния.

Термины, которых мы здесь придерживаемся, не являются общепринятыми. Мы называем *динамическими переменными* операторы q_i, p_i, связанные со специфической квантовой системой; термин «наблюдаемые» мы сохраняем для операторов, возникающих из группы Галилея и связанных, таким образом, с самой структурой пространственно-временного континуума. Конечно, эти операторы между собой также связаны; например, импульс P всей системы в целом (наблюдаемая) равен сумме импульсов отдельных частиц (динамических переменных). Мы применяем здесь разные термины, чтобы избежать смешения понятий.

До сих пор речь шла о квантовой механике систем, состоящих из постоянного числа частиц. Назовем такую квантовую теорию «элементарной». Переход от элементарной квантовой механики к квантовой теории поля, где число частиц может быть неопределенным и среднее число их зависит от времени, аналогичен переходу от механики систем с конечным числом степеней свободы к механике сплошных сред. Квантовые динамические переменные q_i, p_i заменяются здесь *квантованными полями* $\psi_\sigma(x)$, $\pi_\sigma(x)$, где точка пространства-времени x и индекс σ «нумеруют» операторы наподобие индекса i. Квантованные поля удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям, аналогичным соотношениям Гейзенберга—Борна. Для определения зависимости полей от времени служат уравнения, аналогичные квантовым уравнениям Гамильтона. Заметим, что квантованные поля, в отличие от операторов динамических переменных элементарной квантовой механики, не обязательно эрмитовы, хотя и могут быть эрмитовыми в некоторых частных случаях. Теория квантованных полей была разработана Гейзенбергом и Паули (1931).

Гильбертово пространство векторов состояния системы, на котором действуют операторы квантованного поля, было впервые явно описано В. А. Фоком. Оно устроено сложнее, чем пространства состояний элементарной квантовой механики. Пространство Фока содержит «n-частичные» подпространства ($n=0, 1, \ldots$); вектор каждого такого подпространства изображает состояние системы с определенным числом частиц n, тогда как суммы векторов из разных подпространств соответствуют состояниям с неопределенным числом частиц. Операторы квантованного поля $\psi_\sigma(x)$, $\overset{+}{\psi}_\sigma(x)$ изменяют число частиц. Действуя последовательно операторами с разными x и σ на «вектор вакуума» (изображающий состояние с нулевым числом частиц), можно получить базис всего пространства состояний.

Однако операторы квантованного поля порождают из вакуума не состояния с определенными характеристиками (импульсом, спином), а смеси («пакеты») состояний такого рода. Операторы, порождающие частицу с определенными значениями импульса и спина или уничтожающие такую частицу, были введены Иорданом и Вигнером (1928). Связь между операторами квантованного поля и операторами рождения и уничтожения долго была известна лишь в частных случаях; в общем виде ее установил Вайнберг (1964) с помощью группового подхода. Доказательство теоремы Вайнберга является одной из целей этой книги (см. § 12).

Квантовая теория поля является *релятивистской теорией*; это значит, что *векторы состояния системы образуют унитарное представление группы Пуанкаре*. Операторы, представляющие при этом алгебру Ли группы Пуанкаре, эрмитовы и называются наблюдаемыми группы Пуанкаре. (Различие между динамическими переменными и наблюдаемыми здесь проявляется с полной очевидностью.) Наблюдаемые имеют базис из десяти операторов — 4-импульса, трех вращательных и трех «релятивистских» моментов. Квантованные поля также преобразуются по группе Пуанкаре, и их преобразования определенным образом связаны с преобразованиями векторов состояния.

Действие преобразований Лоренца и сдвигов на квантованные поля было ясно в самом начале построения квантовой теории поля (около 1930 года), хотя в то время преобразования этих двух типов рассматривались отдельно. Что касается преобразований пространства состояний, то здесь, по-видимому, отсутствовало ясное понимание роли группы Пуанкаре, объединяющей преобразования Лоренца и сдвиги. Осознание этой роли и построение унитарных (бесконечномерных) представлений группы Пуанкаре является заслугой Вигнера (1939). Естественная физическая мотивировка вигнеровских представлений была одной из целей, побудивших нас написать эту книгу (см. § 14).

Поля, рассматриваемые в квантовой теории поля, могут быть построены по образцу соответствующих *классических* полей, как это делается в случае электромагнитного поля. Однако в других случаях образцом для построения квантованного поля (для *квантования* поля) служит поле, которое может быть отнесено к «классическим» лишь формально, поскольку принимает числовые, а не операторные значения. Такую роль играет электронно-позитронное поле Дирака $\psi_\sigma(x)$. Поскольку операторы $\overset{+}{\psi}_\sigma(x)$ переводят вектор вакуума в «одночастичные состояния», имеется соответствие между векторами состояний, в которых система состоит из одной частицы, и полями Дирака. Отсюда ясно, почему поле Дирака с числовыми значениями, служащее классическим приближением к квантованному полю, играет в элементарной квантовой механике роль вектора состояния. Так как уравнение Дирака для электрона в нерелятивистском пределе переходит в уравнение Шредингера, полученное «квантованием», т. е. путем операторной аналогии из классической механики, то процедуру, в которой сами волновые функции Дирака становятся из числовых операторными, часто называют «вторичным квантованием».

Пространство состояний квантовой системы. В основе всякой квантовой теории лежит понятие *группы симметрии*. В интересующем нас случае квантовой теории поля роль такой группы играет группа Пуанкаре. В некоторых случаях (для систем, допускающих пространственное отражение и обращение времени) в качестве группы симметрии берут полную группу Пуанкаре $\mathscr{P}$; в других случаях ограничиваются ее специальной подгруппой $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Если не будет оговорено противное, *мы будем рассматривать в качестве основной группы* $\mathscr{P}_+^\uparrow$; вопрос о дискретных преобразованиях будет рассмотрен отдельно. В соответствии со сказанным в § 6 под группой Пуанкаре имеется в виду двулистная накрывающая группы $\mathscr{P}$ (или $\mathscr{P}_+^\uparrow$). Когда идет речь о преобразованиях пространства Минковского, в обозначении группы устраняется тильда.

Термин «группа симметрии» имеет в физике два различных смысла. В первом смысле «группа симметрии» системы есть группа преобразований системы, не меняющих ее состояния, например группа движений пространства, переводящих в себя кристаллическую решетку, или группа перестановок, меняющих местами тождественные частицы. В таких случаях «группа симметрии» либо измеряет «степень симметричности» системы, либо исправляет несовершенство нашего аппарата описания, макроскопическое происхождение которого заставляет изображать одну и ту же ситуацию по-разному и затем производить отождествление.

Другой смысл «группы симметрии» состоит в задании кинематики системы. Все возможные состояния системы образуют «пространство», на котором действует группа. При этом не обязательно, чтобы пространство это было линейным (т. е. векторным) пространством [1]. Если фиксировать некоторое исходное состояние системы, то другие состояния можно в ряде случаев получить из исходного действием преобразований группы; их можно поэтому задавать с помощью соответствующих элементов «группы симметрии», исполняющих роль лагранжевых координат (q). Лучше было бы, по-видимому, называть группы такого характера «кинематическими», поскольку преобразования таких групп меняют состояния системы и служат не для измерения ее «симметричности», а для перечисления и классификации всех ее состояний.

В квантовой теории поля основной группой является группа Пуанкаре $\mathscr{P}_+^\uparrow$, а понятие квантовой системы определяется следующим образом:

> Квантовая система задается унитарным представлением группы Пуанкаре $\mathscr{P}_+^\uparrow$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$.

[1] В математике пространство, на котором действует группа, называется *однородным пространством*.

Только что приведенное определение можно назвать «принципом релятивистской инвариантности» квантовой теории поля; мотивировка его приводится ниже.

Всякой квантовой системе сопоставляется некоторое гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, служащее для изображения ее состояний. *Лучом* $\hat{\Phi}$ в пространстве $\mathfrak{H}$ называется множество ненулевых векторов, получаемых из одного вектора Φ умножением на всевозможные комплексные числа $\lambda \neq 0$, т. е. векторов вида $\{\lambda\Phi\}$. Ясно, что в качестве «порождающего» вектора Φ можно взять любой вектор луча.

Определение понятия состояния системы может быть формулировано следующим образом:

Состояние квантовой системы задается лучом $\hat{\Phi}$ гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ этой системы.

Таким образом, все состояния системы отождествляются с лучами $\mathfrak{H}$; сами состояния не образуют векторного пространства (их нельзя ни складывать, ни умножать на числа); но векторы $\mathfrak{H}$ можно складывать и умножать на числа. Поскольку луч можно задать с помощью любого входящего в него вектора Φ («представителя» луча), построение линейных комбинаций в $\mathfrak{H}$ называют *суперпозицией состояний*, а сами векторы $\mathfrak{H}$ — *векторами состояния* системы [1]). Мы будем обозначать состояние системы той же буквой $\hat{\Phi}$, что изображающий ее луч.

Подчеркнем, что лучам здесь приписывается такое же «абсолютное», не зависящее от наблюдателя значение, как точкам пространства Минковского в § 1. Однако каждый релятивистский наблюдатель воспринимает состояние системы по-своему, приписывая, тем самым, лучам абстрактного гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ некоторое координатное выражение; это значит, что каждый наблюдатель по-своему выбирает базис в $\mathfrak{H}$, изображая векторы $\mathfrak{H}$ координатами в этом базисе.

Так называемый «принцип суперпозиции», согласно которому линейная комбинация векторов состояния

---

[1]) Пространство всех лучей $\mathfrak{H}$ называется в математике *комплексным проективным пространством* (оно вместе с $\mathfrak{H}$ бесконечномерно).

системы опять изображает возможное состояние той же системы, полностью содержится в двух предыдущих определениях.

Рассмотрим другую квантовую систему, инерциально движущуюся по отношению к первой, но в остальном физически ей тождественную; точный смысл этого состоит в следующем. Задаются две системы отсчета, связанные преобразованием (a, u) группы Пуанкаре $\mathscr{P}_{+}^{\uparrow}$. Тогда существует обратимый оператор $\bar{U}$ (зависящий от (a, u)), устанавливающий взаимно однозначное соответствие между состояниями «старой» и «новой» систем,

$$\bar{U}\hat{\Phi}=\hat{X},$$

таким образом, что наблюдатель, связанный с «новой» системой отсчета, воспринимает состояние $\hat{X}$ точно так же, как связанный со «старой» системой воспринимает состояние $\hat{\Phi}$.

Следовательно, при переходе от «старой» квантовой системы к «новой», инерциально движущейся по отношению к «старой», происходит преобразование $\bar{U}\,[a, u]$ лучей пространства $\mathfrak{H}$; всевозможные такие преобразования, соответствующие всем элементам (a, u) группы Пуанкаре $\mathscr{P}_{+}^{\uparrow}$, обладают свойствами представления, т. е. произведению элементов группы $\mathscr{P}_{+}^{\uparrow}$ соответствует произведение преобразований, выполненных в том же порядке, и тождественному элементу $(0, 1)$ соответствует тождественное преобразование. Соответствие $(a, u)\rightarrow\bar{U}\,[a, u]$ называется *проективным представлением* группы $\mathscr{P}_{+}^{\uparrow}$. Заметим, что преобразования $\bar{U}\,[a, u]$ не являются линейными операторами, поскольку лучи не образуют векторного пространства. Поэтому проективные представления не являются представлениями группы в смысле § 2.

Следующий принцип квантовой теории позволяет вычислить вероятность того, что система, находившаяся в состоянии $\hat{\Phi}_1$, перейдет в результате измерения в состояние $\hat{\Phi}_2$ ($\langle\,|\,\rangle$ означает скалярное произведение в $\mathfrak{H}$):

Вероятность перехода системы из состояния $\hat{\Phi}_1$ в состояние $\hat{\Phi}_2$ равна

$$\frac{|\langle\Phi_1 \mid \Phi_2\rangle|}{\|\Phi_1\| \cdot \|\Phi_2\|} \qquad (\|\Phi\|^2 = \langle\Phi \mid \Phi\rangle). \tag{10.1}$$

Ясно, что выражение (10.1) не зависит от выбора «представителей», т. е. векторов Φ_1, Φ_2 в соответствующих лучах. Естественно потребовать, чтобы выражение вероятности перехода не зависело от системы отсчета в указанном выше смысле, т. е. чтобы переход «новой» системы от состояния $\hat{X}_1$ к состоянию $\hat{X}_2$, имел ту же вероятность, что и переход «старой» от состояния $\hat{\Phi}_1$ к состоянию $\hat{\Phi}_2$:

$$\frac{|\langle\Phi_1 \mid \Phi_2\rangle|}{\|\Phi_1\| \cdot \|\Phi_2\|} = \frac{|\langle X_1 \mid X_2\rangle|}{\|X_1\| \cdot \|X_2\|}. \tag{10.2}$$

Итак, предполагается, что операторы проективного представления $\hat{U}$ сохраняют выражение вероятностей переходов (10.1).

Неудобство проективных представлений состоит в том, что их операторы $\hat{U}\,[a, u]$ нелинейны. Однако Вигнер доказал, что каждый такой «проективный» оператор можно «накрыть» линейным в следующем смысле.

Пусть элементу (a, u) группы Пуанкаре $\mathscr{P}$ соответствует преобразование лучей

$$\hat{U}[a, u]\,\hat{\Phi} = \hat{X},$$

удовлетворяющее условию (10.2). Тогда существует линейный или антилинейный оператор $U[a, u]$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, такой, что если $U[a, u]\,\Phi = X$, то $\hat{U}[a, u]\,\hat{\Phi} = \hat{X}$. Если оператор U линеен, то он *унитарен*, т. е. $\langle U\Phi \mid UX\rangle = \langle\Phi \mid X\rangle$ для всех Φ, X. Если же U антилинеен, то он *антиунитарен*, т. е. $\langle U\Phi \mid UX\rangle = \overline{\langle\Phi \mid X\rangle}$. Оператор U определяется с точностью до фазового множителя $e^{i\alpha}$ (α действительно).

Далее, как доказали Вигнер и Баргман, можно подобрать фазовые множители таким образом, чтобы операторы $U\,[a, u]$, накрывающие проективные преобразования $U[a, u]$, составляли представление группы Пуанкаре $\mathscr{P}$ в пространстве $\mathfrak{H}$, причем U непрерывно зависит от (a, u). Поскольку единичному элементу $(0, 1)$ соответствует тождественный оператор I, а при непрерывном изменении унитарный оператор остается унитарным, из унитарности I следует унитарность всех операторов $U[a, u]$, соответствующих связной подгруппе $\mathscr{P}_+^\uparrow$.

Теперь ясно, почему в самое определение квантовой системы, данное выше, включается унитарное представление группы Пуанкаре, действующее на пространстве состояний системы. Существование такого представления вытекает из предыдущих построений, основанных на принципиальном равноправии всех релятивистских систем отсчета. По традиции, мы назвали данное выше «групповое» определение квантовой системы «принципом релятивистской инвариантности»; «принцип» в результате надлежащего анализа очень часто оказывается определением.

Заметим, что во всех предыдущих рассуждениях пространство состояний системы $\mathfrak{H}$ фигурировало, так сказать, в неявном виде: предполагалось, что такое пространство существует и что в нем определено унитарное представление группы Пуанкаре, но ничего не было сказано ни о природе векторов этого пространства, ни о виде представляющих операторов. Впоследствии мы придем к более конкретной модели пространств и представлений, подсказываемой естественными физическими соображениями. История развития предмета, впрочем, выглядит иначе: Вигнер пришел к унитарным представлениям группы Пуанкаре с помощью глубокого математического построения.

Наблюдаемые группы Пуанкаре. Как мы показали в § 8, при унитарном представлении группы Пуанкаре $\mathscr{P}_+^\uparrow$ каждой однопараметрической подгруппе, порождаемой элементом a, соответствует однопараметрическая подгруппа унитарных операторов

$$U(\vartheta) = e^{i\vartheta A}, \tag{10.3}$$

порождаемая эрмитовым оператором A. Полученные таким образом операторы представляют алгебру Ли группы Пуанкаре. Элементы a алгебры Ли группы Пуанкаре мы назовем *наблюдаемыми* этой группы; они составляют, таким образом, часть структуры этой группы и связаны непосредственно с природой пространства-времени, но не с той или иной специальной квантовой системой. Операторы A, представляющие алгебру Ли группы $\mathscr{P}_{+}^{\uparrow}$ в пространстве состояний $\mathfrak{H}$ данной квантовой системы, мы будем называть *наблюдаемыми системы* (подразумевая, что сама система задана унитарным представлением группы $\mathscr{P}_{+}^{\uparrow}$). Из § 8 видно, что операторы A допускают сложение, умножение на действительные числа и коммутирование, т. е. в результате этих операций над наблюдаемыми получаются опять наблюдаемые. Базис для наблюдаемых составляют проекции импульса P_α ($\alpha=0$, 1, 2, 3) и моменты $M_{\alpha\beta}$ (α, $\beta=0$, 1, 2, 3), связанные перестановочными соотношениями (8.25).

Оператор массы. Теперь мы можем определить важный оператор, действующий на пространстве состояний системы и задающий в качестве собственных значений возможные значения квадрата ее общей массы. Будем исходить из основного релятивистского соотношения между 4-импульсом и массой:

$$M^2=P_0^2-P_1^2-P_2^2-P_3^2. \tag{10.4}$$

Естественно сохранить это соотношение, первоначально установленное для одной релятивистской частицы, также и для всякой релятивистской системы, т. е. системы, описываемой некоторым унитарным представлением группы Пуанкаре.

При переходе от классической теории к квантовой P_α превращаются в операторы, которые можно отождествить с введенными выше операторами импульса, имеющими соответствующее происхождение от сдвигов пространства Минковского. Тогда M^2 также оказывается эрмитовым оператором, заданным на пространстве векторов состояния $\mathfrak{H}$. (Заметим, что оператор M вовсе не вводится, а значения массы определяются как неотрицательные квадратные корни из собственных значений M^2). Так как оператор M^2 является оператором

Казимира группы Пуанкаре (§ 8), он перестановочен со всеми операторами представления $U[a, u]$. Если, в частности, это представление неприводимо, то по лемме Шура оператор M^2 является гомотетией пространства $\mathfrak{H}$, т. е. все векторы $\mathfrak{H}$ являются собственными векторами M^2, принадлежащими одному и тому же собственному значению. Поскольку мы хотим истолковать это собственное значение как квадрат массы, допустим, что оно неотрицательно. Как мы увидим дальше, это накладывает ограничение на неприводимые представления группы Пуанкаре.

Вакуумное состояние. Как мы увидим дальше, с квантовой системой (в смысле квантовой теории поля) связываются частицы, именуемые ее *квантами*. Системе соответствуют некоторые операторы, так называемые *операторы квантованного поля*, применение которых к вектору состояния приводит к состоянию с увеличенным или уменьшенным числом частиц. Таким образом, пространство $\mathfrak{H}$ всех векторов состояния распадается в сумму подпространств $\mathfrak{H}_n$, векторы каждого из которых изображают состояния системы с определенным числом частиц n.

Такая «неоднородность» пространства состояний приводит, в частности, к тому, что в $\mathfrak{H}$ должен существовать особый вектор Φ_0, изображающий состояние системы вовсе без частиц. Состояние этого рода называется *вакуумом*. Простейшее предположение, которое мы примем, состоит в том, что имеется только одно такое состояние, изображаемое единственным лучом $\hat{\Phi}_0$ [1]). Поскольку при любом инерциальном движении системы состояние без частиц сохраняет свою особую роль и одинаково воспринимается всеми релятивистскими наблюдателями, мы предположим, что оно инвариантно, т. е.

Существует вектор состояния Φ_0, инвариантный по отношению к группе Пуанкаре $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Этот вектор, называемый вектором вакуума, определяется с точностью до ненулевого множителя.

[1]) Существуют попытки построения квантовой теории поля, не предполагающие единственности вакуумного состояния.

Отсюда уже следует, что вакуумное состояние является состоянием с определенными значениями проекций 4-импульса P_α, равными нулю; в самом деле, Φ_0 не меняется под действием сдвигов, т. е. $e^{i\vartheta P_\alpha}\Phi_0 = 0$ при всех ϑ, откуда

$$P_\alpha \Phi_0 = 0 \qquad (\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{10.5}$$

Таким образом, из инвариантности вакуума уже следует, что это состояние имеет нулевую массу.

Квантованные поля $\psi_\sigma(x)$, которые мы хотим определить, не являются, строго говоря, операторами ни при каком отдельном значении x. Это обобщенные вектор-функции с операторными значениями.

Напомним, что называется обобщенной функцией «со скалярными значениями» [1]. Для определения обобщенных функций фиксируется класс «основных», или «пробных», функций $\{\varphi(x)\}$, имеющих непрерывные производные всех порядков и достаточно хорошо убывающих на бесконечности (например, быстрее любой степени $|x| = \{\Sigma\,(x^\alpha)^2\}^{1/2}$; имеется ряд вариантов этого условия). Для «основных» функций вводится понятие сходимости, что можно также сделать разными способами; но при всех этих способах $\varphi_n \to \varphi_0$ влечет за собой равномерную сходимость $\varphi_n(x)$ к $\varphi_0(x)$ вместе с производными любого порядка.

Каждая «обычная» функция $\psi(x)$ задает *функционал* от «основных» функций по правилу $\psi(\varphi) = \int \psi(x)\,\varphi(x)\,dx$; чтобы придать этому интегралу вид эрмитова скалярного произведения, будем записывать этот функционал, несколько отступив от общепринятого правила, в виде $\bar{\psi}(\varphi)$. Тогда

$$\psi(\varphi) = \int \bar{\psi}(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{10.6}$$

Этот функционал линеен и непрерывен: если $\varphi_n \to \varphi_0$, то $\psi(\varphi_n) \to \psi(\varphi_0)$. Нетрудно показать, что различным «обычным» функциям соответствуют при этом разные функционалы; при сложении функций складываются

[1]) Иначе обобщенные функции называются «распределениями» (distributions).

и соответствующие им функционалы, а при умножении функции на число функционал умножается на то же число. Таким образом, «обычные» функции находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными функционалами от φ, составляющими некоторый специальный класс таких функционалов. Можно поэтому отождествить «обычную» функцию $\overline{\psi}(x)$ с порождаемым ею линейным функционалом (10.6), а затем расширить понятие функции, определив *обобщенную функцию* как произвольный линейный непрерывный функционал, действующий на «основные» функции.

Например, таким функционалом является δ-функция $\delta(x-a)$, значение которой на основной функции φ, по определению, равно $\varphi(a)$. По аналогии с (10.6) для обобщенных функций ψ вместо $\psi(\varphi)$ пишут такой же интеграл (10.6); но следует иметь в виду условный характер подобных записей.

Аналогично определяются обобщенные функции с операторными значениями: по определению, такая функция $\psi(x)$ есть функционал, сопоставляющий каждой основной функции φ оператор $\psi(\varphi)$ в некотором пространстве (в интересующем нас случае — в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$). Оператор $\psi(\varphi)$ также символически записывается в виде интеграла (10.6), причем надо иметь в виду, что значение «интеграла» при любой функции φ есть уже не число, а оператор. Предполагается, что оператор $\psi(\varphi)$ линейно и непрерывно зависит от φ: $\psi(\varphi_1+\varphi_2)$ есть сумма операторов $\psi(\varphi_1)+\psi(\varphi_2)$; $\psi(\lambda\varphi)$ есть кратное $\lambda\psi(\varphi)$ оператора $\psi(\varphi)$; если $\varphi_n \to \varphi_0$, то операторы $\psi(\varphi_n)$ сходятся к $\psi(\varphi_0)$ в некотором смысле (например, в «сильном» смысле, т. е. для любого вектора Φ пространства $\mathfrak{H}$ должно быть $\|\psi(\varphi_n)\Phi - -\psi(\varphi_0)\Phi\| \to 0$).

Обобщенные вектор-функции ψ определяются как линейные непрерывные функционалы от вектор-функций $\varphi(x)=\{\varphi_\sigma(x)\}$, где каждая $\varphi_\sigma(x)$ — «основная» функция. Если представить $\varphi(x)$ в виде суммы вектор-функций вида $(0, \ldots, 0, \varphi_\sigma(x), 0, \ldots, 0)$,

$$\varphi(x)=\sum_\sigma (0, \ldots, 0, \varphi_\sigma(x), 0, \ldots, 0),$$

то имеем

$$\psi(\varphi) = \sum_{\sigma} \psi_\sigma(\varphi_\sigma),$$

где каждая ψ_σ — обобщенная функция в прежнем смысле, т. е. линейный непрерывный функционал от скалярной «основной» функции $\varphi_\sigma(x)$. Пользуясь для этих функционалов записью (10.6), имеем символическое выражение

$$\psi(\varphi) = \int \sum_{\sigma} \overline{\psi_\sigma(x)}\, \varphi_\sigma(x)\, dx. \tag{10.7}$$

Определение обобщенных вектор-функций и запись (10.7) очевидным образом переносятся на вектор-функции, значениями которых являются операторы в $\mathfrak{H}$.

Закон преобразования квантованных полей[1]. Рассмотрим опять, наряду с заданной квантовой системой, другую систему, инерциально движущуюся относительно первой, но в остальном ей физически тождественную. Мы будем предполагать, что для всех таких систем, различающихся лишь в указанном смысле, квантованное поле задается одним и тем же функционалом ψ (см. (10.7)). Однако вектор-функции φ, на которые действует этот функционал, следует при этом считать зависящими от движения системы, т. е. преобразующимися по группе Пуанкаре согласно (2.11). Таким образом, мы принимаем описание квантованного поля, при котором неизменный тип поля характеризуется неизменностью функционала ψ, а изменение движения системы — изменением его аргумента φ. Оператор $\psi(\varphi')$, отвечающий «новой» квантовой системе, должен исполнять для нее ту же роль, что и оператор $\psi(\varphi)$ для «старой». Это значит, что если $\psi(\varphi)$ переводит вектор состояния Φ в вектор состояния X, то $\psi(\varphi')$ должен переводить вектор $U\Phi$ в вектор UX, где $U = U[a, u]$ связывает состояния обеих систем, как было указано выше. Это положение вещей можно иллюстрировать следующей диаграммой, в которой результат последовательного

[1] Трактовка этого вопроса в основном заимствована из [2].

действия операторов не зависит от выбора пути (направо и вниз, или вниз и направо):

$$\begin{tikzcd} \Phi \arrow[r, "\psi(\varphi)"] \arrow[d, "U"'] & X \arrow[d, "U"] \\ \Phi' \arrow[r, "\psi(\varphi')"'] & X' \end{tikzcd} \tag{10.8}$$

Иначе говоря, должно быть $U\psi(\varphi)=\psi(\varphi')\,U$, или

$$U\psi(\varphi)\,U^{-1}=\psi(\varphi'),\quad U=U[a,\,u]. \tag{10.9}$$

Для сравнения этого оператора с $\psi(\varphi)$ обозначим оператор в левой части, зависящий от φ, через $\psi'(\varphi)$. Тогда имеем

$$\psi'(\varphi)=\psi(\varphi'). \tag{10.10}$$

Чтобы перейти от «функциональной» записи (10.10) к обычно употребляемому закону преобразования компонент поля $\psi_\sigma(x)$, надо условиться, по какому представлению группы $SL(2)$ преобразуются вектор-функции $\varphi(x)$. Мы примем для них преобразования типа $(0,\,j)$ (чтобы получить для компонент поля преобразования типа $(j,\,0)$, см. ниже; конечно, можно было бы поступить и наоборот). Так как $D^{(0,\,j)}[u]=\overset{+}{D}{}^{(j,\,0)}[u]^{-1}=\overline{D^{(j)}[u^{-1}]}^{T}$ (см. (9.35)), имеем

$$\varphi'_\sigma(x)=\sum_{\tau=-j}^{j}\bar{D}^{(j)}_{\tau\sigma}[u^{-1}]\,\varphi_\tau(\Lambda^{-1}(x-a)). \tag{10.11}$$

Из (10.7), (10.11) следует, что

$$\begin{aligned}\psi(\varphi')&=\int\sum_\tau\bar{\psi}_\tau(x)\,\varphi'_\tau(x)\,dx=\\ &=\int\sum_\tau\bar{\psi}_\tau(x)\sum_\sigma\bar{D}_{\sigma\tau}[u^{-1}]\,\varphi_\sigma(\Lambda^{-1}(x-a))\,dx=\\ &=\int\sum_\sigma\overline{\left(\sum_\tau D_{\sigma\tau}[u^{-1}]\,\psi_\tau(x)\right)}\,\varphi_\sigma(\Lambda^{-1}(x-a))\,dx.\end{aligned}$$

Выполним замену переменных, полагая $x=\Lambda x'+a$. Поскольку якобиан, т. е. определитель собственного преобразования Лоренца, равен 1, имеем

$$\psi(\varphi')=\int\sum_{\sigma}\overline{\left(\sum_{\tau}D_{\sigma\tau}[u^{-1}]\psi_{\tau}(\Lambda x'+a)\right)}\varphi_{\sigma}(x')\,dx'. \qquad (10.12)$$

Чтобы сравнить обобщенные функции с операторными значениями ψ и ψ', мы должны применить их к одной и той же «основной» вектор-функции φ; из (10.7) непосредственно следует

$$\psi'(\varphi)=\int\sum_{\sigma}\overline{\psi}'_{\sigma}(x')\varphi_{\sigma}(x')\,dx' \qquad (10.13)$$

и в силу произвольности вектор-функции φ из (10.12), (10.13) получаем *закон преобразования квантованных полей*

$$\psi'_{\sigma}(x)=U[a,\ u]\psi_{\sigma}(x)U^{-1}[a,\ u]=$$
$$=\sum_{\tau=-j}^{j}D^{(j)}_{\sigma\tau}[u^{-1}]\psi_{\tau}(\Lambda x+a). \qquad (10.14)$$

Теперь ясно, с какой целью мы выбрали для вектор-функции «дуальный» закон преобразования (10.11): благодаря этому компоненты квантованного поля преобразуются с помощью матриц представления $(j,\ 0)$ группы $SL\,(2)$. Следует заметить, однако, что (10.14) не задает представления группы Пуанкаре в обычном смысле. В самом деле, последовательное выполнение двух преобразований $(a_2,\ u_2)$, $(a_1,\ u_1)$, которым соответствуют преобразования Лоренца Λ_2, Λ_1, приводит к преобразованиям

$$\psi'_{\rho}(x)=\sum_{\tau}D_{\rho\tau}[u_2^{-1}]\psi_{\tau}(\Lambda_2x+a_2),$$
$$\varphi'_{\sigma}(x)=\sum_{\rho}D_{\sigma\rho}[u_1^{-1}]\psi'_{\rho}(\Lambda_1x+a_1),$$

откуда

$$\psi''_{\sigma}(x)=\sum_{\tau}\left(\sum_{\rho}D_{\sigma\rho}[u_1^{-1}]D_{\rho\tau}[u_2^{-1}]\right)\psi_{\tau}(\Lambda_2(\Lambda_1x+a_1)+a_2)=$$
$$=\sum_{\tau}D_{\sigma\tau}[(u_2u_1)^{-1}]\psi_{\tau}(\Lambda_2(\Lambda_1x+a_1)+a_2),$$

а это преобразование соответствует произведению $(a_2, u_2)(a_1, u_1)$, в котором элементы группы Пуанкаре перемножены в порядке, обратном порядку выполнения преобразований [1]).

Кроме того, следует иметь в виду, что квантованные поля не образуют векторного пространства. В самом деле, если мы хотим иметь в качестве необходимого признака квантованных полей обычные перестановочные соотношения (между $\psi_\sigma(x)$, $\overset{+}{\psi}_\tau(x')$, описываемые в § 12, или между $\psi_\sigma(x)$ и «сопряженными импульсами» $\pi_\tau(x')$, не рассматриваемые в этой книге), то эти соотношения не сохраняются при сложении полей или их умножении на произвольные числа. Оставляя в стороне возможные обобщения, мы должны считать, что преобразования полей (10.14) не составляют представления группы Пуанкаре еще и по той причине, что не задают линейных операторов. Мы видим, что закон преобразования квантованных полей (10.14) существенно отличается от закона преобразования (2.11) «классических» полей; термин «представление» применяется здесь в условном смысле.

Поскольку квантованные поля являются операторами, можно перейти к сопряженным операторам, что в формальном отношении напоминает комплексное сопряжение «классических» (числовых) полей. Напомним, что операторы A и $\overset{+}{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ называются (эрмитово) сопряженными, если для любых векторов Φ, X этого пространства

$$\langle A\Phi \mid X\rangle = \langle \Phi \mid \overset{+}{A} X\rangle$$

(предполагается, что обе части имеют смысл; мы отвлекаемся здесь от более тонких вопросов, связанных с областями определения операторов). Переходя в (10.14) к сопряженным операторам, получаем

$$\overset{+}{\psi}{}'_\sigma(x) = U[a, u]\,\overset{+}{\psi}_\sigma(x)\,U^{-1}[a, u] = \\ = \sum_{\tau=-j}^{j} \bar{D}^{(j)}_{\sigma\tau}[u^{-1}]\,\overset{+}{\psi}_\tau(\Lambda x + a). \qquad (10.15)$$

---

[1]) В этом смысле формула (10.14) задает «антипредставление» группы.

Аналогично, исходя из произвольных, в частности приводимых представлений $D[u]$ группы $SL(2)$, можно получить закон преобразования приводимых квантованных полей (см. следующий ниже пример электронно-позитронного поля, которое приводимо по отношению к специальной группе Пуанкаре $\mathscr{P}^{\uparrow}_{+}$).

Прибавим еще, что в предыдущих рассуждениях имелись в виду, как и во всем этом параграфе, преобразования специальной группы Пуанкаре $\mathscr{P}^{\uparrow}_{+}$. В случае пространственного отражения, также допускающего «пассивное» истолкование, основная формула (10.10) остается в силе, но закон преобразования квантованных полей (10.14) усложняется в связи с необходимостью «удвоения» пространства представления. Наконец, в случае обращения времени теряет смысл обычное представление о замене «релятивистского наблюдателя»; оказывается, в этом случае и основное правило (10.9), (10.10) должно быть изменено.

Примеры квантованных полей. Примеры квантованных полей сразу же получаются из классических, рассмотренных в § 7. Мы прибавим некоторые другие (не спинорные) виды представления электромагнитного поля.

Нейтринное и антинейтринное поля. Нейтринное поле имеет две компоненты $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, которые в квантованном случае являются операторными функциями точки x. Закон преобразования для антинейтринного поля соответствует представлению $(1/2,\ 0)$ группы $SL(2)$; в формулах (10.14), (10.15) надо при этом отождествить индексы $-1/2$, $1/2$ со «спинорными» индексами 1, 2. Если не считать явления «антипредставления», это по-прежнему «спинорный» закон преобразования полей

$$\begin{pmatrix} \psi_1'(x) \\ \psi_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}^{-1} & u_{12}^{-1} \\ u_{21}^{-1} & u_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(\Lambda x + a) \\ \psi_2(\Lambda x + a) \end{pmatrix}. \tag{10.16}$$

Нейтринное поле соответствует представлению $(0,\ 1/2)$ и, следовательно, является «коспинорным»:

$$\begin{pmatrix} \psi_1'(x) \\ \psi_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_{11} & \bar{u}_{21} \\ \bar{u}_{12} & \bar{u}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(\Lambda x + a) \\ \psi_2(\Lambda x + a) \end{pmatrix}. \tag{10.17}$$

Неприводимое представление группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ выделяется уравнениями Вейля.

Электронно-позитронное поле. Это поле, как и в «неквантованном» случае, соответствует сумме двух представлений $(1/2,\ 0)\oplus(0,\ 1/2)$ группы $SL\,(2)$; здесь также существенно представление пространственных отражений, к чему мы еще позже вернемся. Что касается группы $SL\,(2)$, то ее матрицам соответствуют преобразования квантованного поля

$$\begin{bmatrix} \psi_1'(x) \\ \psi_2'(x) \\ \psi_3'(x) \\ \psi_4'(x) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} u^{-1} & 0 \\ \hline 0 & \overset{*}{u} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \psi_1(\Lambda x + a) \\ \psi_2(\Lambda x + a) \\ \psi_3(\Lambda x + a) \\ \psi_4(\Lambda x + a) \end{bmatrix} \tag{10.18}$$

(ср. преобразование биспиноров, § 6). В базисе Дирака—Паули «ящичная» форма матриц, преобразующих компоненты поля, исчезает.

Неприводимые представления группы $\mathscr{P}$ выделяются уравнением Дирака, к чему мы вернемся ниже. Заменяя матрицы (7.16) матрицами дискретных преобразований (7.17), получаем представление полной группы Пуанкаре $\mathscr{P}$.

Электромагнитное поле. Имеется несколько способов задания электромагнитного поля, употребляемых в разных случаях.

(а) «*Спинорное*» *представление.* Это представление было введено для классического (не квантованного) поля в § 7. Квантованное поле задается представлением типа $(1,\ 0)\oplus(0,\ 1)$ и, следовательно, имеет шесть компонент, $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ и $\overset{*}{F}_1(x)$, $\overset{*}{F}_2(x)$, $\overset{*}{F}_3(x)$, причем последние три в том же порядке эрмитово сопряжены трем первым: $\overset{*}{F}_k(x)=\overset{+}{F}_k(x)$. Это условие заменяет в случае квантованных полей комплексную сопряженность. «Удвоение» представления и здесь нужно лишь для представления пространственного отражения. Преобразования группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ представляются в виде

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{F}'(x) \\ \overset{*}{\boldsymbol{F}}{}'(x) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} D^{(1)}[u^{-1}] & 0 \\ \hline 0 & \bar{D}^{(1)}[u^{-1}] \end{array}\right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}(\Lambda x + a) \\ \overset{*}{\boldsymbol{F}}(\Lambda x + a) \end{pmatrix} \tag{10.19}$$

(ср. (10.14) и (10.15)).

Переход к эрмитовым операторам поля $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ производится по обычным правилам: $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}-i\boldsymbol{H}$, $\overset{*}{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{E}+i\boldsymbol{H}$ (ср. § 7). При этом матрицы, преобразующие компоненты поля, теряют свою «ящичную» форму. Для простейшего преобразования Лоренца имеем (аргумент в левых частях x, в правых $\Lambda x+a$; скорость света c положена равной 1)

$$
\begin{aligned}
F'_1 &= F_1, & \overset{*}{F}{}'_1 &= \overset{*}{F}_1,\\
F'_2 &= \frac{F_2 - ivF_3}{\sqrt{1-v^2}}, & \overset{*}{F}{}'_2 &= \frac{\overset{*}{F}_2 + iv\overset{*}{F}_3}{\sqrt{1-v^2}},\\
F'_3 &= \frac{ivF_2 + F_3}{\sqrt{1-v^2}}, & \overset{*}{F}{}'_3 &= \frac{-iv\overset{*}{F}_2 + \overset{*}{F}_3}{\sqrt{1-v^2}}.
\end{aligned}
\qquad (10.20)
$$

Из этих формул непосредственно видно, что $F_k(x)$ преобразуется в линейные комбинации $F_k(\Lambda x+a)$, а $\overset{*}{F}_k(x)$ отдельно в линейные комбинации $\overset{*}{F}_k(\Lambda x+a)$ [1]).

(б) *Тензорное представление.* В релятивистской трактовке напряженности поля обычно изображаются антисимметрическим тензором $f_{\alpha\beta}$ (α, $\beta=0$, 1, 2, 3). (Подчеркнем, что здесь, как и в следующем примере (в), мы имеем дело с тензорным, а не спин-тензорным полем.) Преобразование квантованного поля производится с помощью $\Lambda=h\,(u)$:

$$
f'_{\alpha\beta}(x) = (\Lambda^{-1})^{\gamma}_{\alpha}\,(\Lambda^{-1})^{\delta}_{\beta}\,f_{\gamma\delta}(\Lambda x + a). \qquad (10.21)
$$

Поскольку тензор над пространством Минковского валентности (2, 0) эквивалентен спин-тензору валентности (2, 2) (см. § 5), это представление имеет спин-тензорный тип (2, 2). Однако уже условие антисимметричности уменьшает пространство представления.

Связь между тензорным представлением $f_{\alpha\beta}$ и представлением ($\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$) хорошо известна; поэтому тензорное представление электромагнитного поля эквивалентно описанному выше спинорному ($\boldsymbol{E}\mp i\boldsymbol{H}$).

---

[1]) Предыдущие формулы отличаются от обычных формул преобразования компонент электромагнитного поля (знаком при v); это связано с разными законами преобразования классических и квантованных полей (ср. (10.14) и (2.11)).

(в) *Представление вектор-потенциала.* Поле задается 4-вектором $A^{\alpha}(x)$ с действительными компонентами, преобразуемым с помощью преобразований Лоренца:

$$A'^{\alpha}(x) = \Lambda^{-1\alpha}_{\ \ \beta} A^{\beta}(\Lambda x + a), \quad \Lambda = h(u). \qquad (10.22)$$

Это *тензорное* поле, которое можно, впрочем, привести к спин-тензорному виду. Заменяя 4-вектор $A^{\alpha}(x)$ спин-тензором $a^{\mu\dot{\nu}}(x)$ по обычной формуле

$$\begin{bmatrix} a^{1\dot{1}} & a^{1\dot{2}} \\ a^{2\dot{1}} & a^{2\dot{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 + A_3 & A_1 - iA_2 \\ A_1 + iA_2 & A_0 - A_3 \end{bmatrix}, \qquad (10.23)$$

убеждаемся, что представление принадлежит типу (1/2, 1/2). Ввиду действительности компонент вектор-потенциала, здесь выделяется действительное подпространство всех спин-тензоров $a^{\mu\dot{\nu}}$ с эрмитовыми матрицами относительно фиксированного базиса, инвариантное относительно действия группы $SL(2)$. Соответственно получается представление группы $\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$ в пространстве спин-тензоров, зависящих от x. Число действительных компонент поля равно четырем. Пространственное отражение может быть задано в том же пространстве:

$$A'^{k}(\boldsymbol{x}, x^0) = -A^{k}(-\boldsymbol{x}, x^0) \qquad (k = 1, 2, 3),$$
$$A'^{0}(\boldsymbol{x}, x^0) = A^{0}(-\boldsymbol{x}, x^0). \qquad (10.24)$$

Все три вида представлений группы $\mathcal{P}_{+}^{\uparrow}$, с помощью которых описывается электромагнитное поле, приводимы. Чтобы выделить неприводимые представления группы Пуанкаре, поле подчиняют уравнениям Максвелла. В представлении (а) это делается с помощью спинорного аппарата, как было показано в § 7. В случаях (б), (в) запись уравнений Максвелла хорошо известна; следует иметь в виду, что в представлении вектор-потенциала к уравнениям Максвелла присоединяется условие Лоренца или другое, ему равносильное, без чего представление не будет неприводимым.

Следует отметить еще, что мы рассматриваем здесь поля лишь с точки зрения законов их преобразования. Между тем, различные способы задания одного и того же поля могут иметь и разный физический смысл; так, представления электромагнитного поля (а), (б) описывают напряженности поля, которые могут быть в принципе измерены, тогда как (в) есть представление потенциалов, выбор которых принципиально не однозначен.

Импульсы и квантованные поля. Рассмотрим однопараметрическую подгруппу сдвигов, порожденную вектором a:

$$g(\vartheta) = T_{\vartheta a} = (\vartheta a,\ 1), \quad -\infty < \vartheta < \infty. \qquad (10.25)$$

Согласно § 8 в каждом представлении группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ этой подгруппе соответствует однопараметрическая подгруппа. В частности, это справедливо для унитарного представления $U\,[a,\ u]$, действующего в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ векторов состояния нашей квантовой системы. Пусть эта однопараметрическая подгруппа порождается оператором A:

$$U(\vartheta) = e^{i\vartheta A}, \quad U(\vartheta) = U\,[\vartheta a,\ 1]. \qquad (10.26)$$

В силу унитарности представления семейство $U(\vartheta)$ состоит из унитарных операторов; оператор A эрмитов. По определению представления алгебры Ли (§ 8) оператор A представляет в пространстве $\mathfrak{H}$ элемент алгебры Ли, порождающий однопараметрическую подгруппу (10.25), т. е. вектор сдвига a.

Поскольку мы пока не знаем строения пространства состояний $\mathfrak{H}$, а только предполагаем его существование, вид оператора A еще не может быть установлен. Однако из общего закона преобразования квантованных полей (10.14) можно вывести перестановочные соотношения, связывающие этот оператор с операторами поля. В самом деле, должно быть

$$U\,[\vartheta a,\ 1]\,\psi_\sigma(x)\,U^{-1}\,[\vartheta a,\ 1] = \psi_\sigma(x + \vartheta a) \qquad (10.27)$$

или, что то же,

$$e^{i\vartheta A}\psi_\sigma(x - \vartheta a)\,e^{-i\vartheta A} = \psi_\sigma(x).$$

Разлагая $\psi_\sigma(x-a)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь членами нулевого и первого порядка по ϑ, имеем

$$(1 + i\vartheta A)\left(\psi_\sigma(x) - \vartheta a^\alpha \frac{\partial\psi_\sigma(x)}{\partial x^\alpha}\right)(1 - i\vartheta A) = \psi_\sigma(x),$$

откуда, с той же точностью,

$$i\vartheta [A,\ \psi_\sigma(x)] = \vartheta a^\alpha \frac{\partial\psi_\sigma(x)}{\partial x^\alpha};$$

следовательно,

$$[A,\ \psi_\sigma(x)] = \frac{1}{i} a^\alpha \frac{\partial\psi_\sigma(x)}{\partial x^\alpha}. \tag{10.28}$$

Возьмем, в частности, в качестве a один из базисных векторов e_α; тогда $a^\alpha=1$, $a^\beta=0$ при $\beta\neq\alpha$ и, обозначая соответствующий оператор A через P_α, имеем

$$[P_\alpha,\ \psi_\sigma(x)] = \frac{1}{i} \frac{\partial\psi_\sigma(x)}{\partial x^\alpha}. \tag{10.29}$$

Операторы P_α ($\alpha=0$, 1, 2, 3) называются *операторами 4-импульса* или энергии-импульса[1]). Согласно § 8 сложению векторов a соответствует сложение представляющих их операторов; поэтому из $a=a^\alpha e_\alpha$ следует

$$A = a^\alpha P_\alpha. \tag{10.30}$$

Отсюда видно, что при замене базиса в пространстве Минковского операторы P_α преобразуются как ковариантные компоненты 4-вектора, что и оправдывает данное им выше название. Соответствующие контравариантные компоненты 4-импульса имеют вид

$$P^0 = P_0,\quad P^k = -P_k \qquad (k=1,\ 2,\ 3). \tag{10.31}$$

Для сопряженных операторов $\overset{+}{\psi}_\sigma(x)$ аналогичным способом получаются из (10.15) перестановочные соотношения

$$[P_\alpha,\ \overset{+}{\psi}_\sigma(x)] = \frac{1}{i} \frac{\partial\overset{+}{\psi}_\sigma(x)}{\partial x^\alpha}. \tag{10.32}$$

Применяя операторы квантованного поля $\psi_\sigma(x)$, $\overset{+}{\psi}_\sigma(x)$ к вектору вакуума Φ_0, мы получаем векторы состояния $\psi_\sigma(x)\Phi_0$, $\overset{+}{\psi}_\sigma(x)\Phi_0$. Из перестановочных соотношений (10.29) следует, что

$$P_\alpha\psi_\sigma(x)\Phi_0 = \psi_\sigma(x)P_\alpha\Phi_0 + \frac{1}{i}\frac{\partial\psi_\sigma(x)}{\partial x^\alpha}\Phi_0.$$

---

[1]) Мы выбираем единицы таким образом, чтобы было $\hbar=1$; в обычное выражение операторов импульса входит справа множитель $\hbar$.

Так как мы предположили инвариантность вектора вакуума относительно преобразований группы $\mathcal{P}_+^\uparrow$, имеем $P_\alpha\Phi_0 = 0$ (см. (10.5)). Поэтому предыдущее равенство принимает вид

$$P_\alpha\psi_\sigma(x)\,\Phi_0 = \frac{1}{i}\,\frac{\partial\psi_\sigma(x)}{\partial x^\alpha}\,\Phi_0. \tag{10.33}$$

Применим еще раз к обеим частям оператор P_α. Поскольку перестановочное соотношение (10.29) справедливо также для «сдвинутого» поля $\psi_\sigma(x+\vartheta e_\alpha)$, его можно применить к разностному отношению $(1/\vartheta)(\psi_\sigma(x+\vartheta e_\alpha)-\psi_\sigma(x))$ и, в пределе, к $\dfrac{\partial\psi_\sigma(x)}{\partial x^\alpha}$. Теперь из (10.33) следует

$$P_\alpha^2\psi_\sigma(x)\,\Phi_0 = -\,\frac{\partial^2\psi_\sigma(x)}{\partial x^{\alpha 2}}\,\Phi_0.$$

Отсюда, пользуясь обозначением $\square$ для оператора Даламбера, имеем

$$M^2\psi_\sigma(x)\,\Phi_0 = \left(\frac{\partial^2\psi_\sigma(x)}{\partial x^{1^2}} + \frac{\partial^2\psi_\sigma(x)}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2\psi_\sigma(x)}{\partial x^{3^2}} - \frac{\partial^2\psi_\sigma(x)}{\partial x^{0^2}}\right)\Phi_0 = \\ = \square\,\psi_\sigma(x)\,\Phi_0. \tag{10.34}$$

Одночастичные состояния. Операторы квантованного поля $\psi_\sigma(x)$, $\overset{+}{\psi}_\sigma(x)$, действующие на пространстве состояний $\mathfrak{H}$, сообщают ему некоторую структуру, имеющую важный физический смысл. Рассмотрим сначала лишь операторы $\psi_\sigma(x)$. Применив к вектору вакуума последовательно n операторов поля, получаем вектор состояния вида

$$\Phi_n = \psi_{\sigma_1}(x_1)\,\psi_{\sigma_2}(x_2)\,\ldots\,\psi_{\sigma_n}(x_n)\,\Phi_0.$$

В силу инвариантности вакуума для операторов $U = U[a, u]$, представляющих группу Пуанкаре, имеем $U^{-1}\Phi_0 = \Phi_0$, откуда

$$U\Phi_n = (U\psi_{\sigma_1}(x_1)\,U^{-1})\,\ldots\,(U\psi_{\sigma_n}(x_n)\,U^{-1})\,\Phi_0 = \\ = \psi'_{\sigma_1}(x_1)\,\ldots\,\psi'_{\sigma_n}(x_n)\,\Phi_0.$$

Таким образом, векторы вида Φ_n преобразуются в векторы того же вида и, следовательно, их линейные комбинации составляют инвариантное подпространство в $\mathfrak{H}$, которое мы обозначим $\mathfrak{H}_n$. Вектором $\mathfrak{H}_n$ приписывается следующий физический смысл: считается, что *система в состоянии* Φ_n *содержит определенное число частиц, равное n.* Таким образом, применение оператора $\psi_\sigma(x)$ увеличивает число частиц на одну. В частности, $\mathfrak{H}_1$ состоит из векторов, изображающих *одночастичные состояния* системы, т. е. состояния, в которых система содержит в точности одну частицу. Векторы $\mathfrak{H}_1$ изображают, тем самым, всевозможные состояния частицы, связываемой с квантованным полем и именуемой его квантом.

Примем теперь, следуя Вигнеру, следующее *определение понятия элементарной частицы*:

Квантовая система, описываемая неприводимым представлением группы Пуанкаре, называется элементарной частицей.

Это определение, разумеется, предполагает «достаточно подробный» способ описания системы, при котором учитываются все возможные изменения внутреннего состояния системы, связанные с ее «сложностью». С другой стороны, здесь не учитываются «внутренние степени свободы», не укладывающиеся в пространственно-временную трактовку, т. е. не описываемые группой Пуанкаре (например, разные виды «унитарного спина»).

Мы не имеем здесь возможности подробно проанализировать понятие «элементарной частицы» в его зависимости от рассматриваемой группы симметрии. Попытку такого анализа мы предприняли в [14] (гл. 18). Здесь достаточно отметить, что каждая элементарная частица в традиционном смысле этого слова описывается некоторым неприводимым представлением группы Пуанкаре (специальной группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ или в других случаях полной группы $\mathscr{P}$). При этом различные элементарные частицы могут описываться одним и тем же представлением, а при слишком грубом описании под указанное определение может подпасть и явно «не элементарный» объект, такой, как атомное ядро.

Если предположить, что квантами рассматриваемого поля являются *элементарные* частицы, то одночастичное пространство $\mathfrak{H}_1$ преобразуется по *неприво-*

димому представлению группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ (мы опять оставляем в стороне дискретные преобразования).

Таким образом, векторы

$$\Phi = \psi_\sigma(x)\,\Phi_0 \tag{10.35}$$

образуют базис неприводимого представления группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$.

Оператор M^2 является оператором Казимира группы Пуанкаре (§ 8), т. е. перестановочен со всеми операторами любого представления этой группы. Согласно лемме Шура (см. Приложение II) для только что описанного неприводимого представления M^2 является гомотетией, т. е. умножает все векторы $\mathfrak{H}_1$ на одно и то же число, которое мы обозначим через m^2:

$$M^2\psi_\sigma(x)\,\Phi_0 = m^2\psi_\sigma(x)\,\Phi_0.$$

Сопоставляя это с (10.34), получаем

$$(\Box - m^2)\,\psi_\sigma(x)\,\Phi_0 = 0.$$

Отсюда, вообще говоря, не следует еще, что поле $\psi_\sigma(x)$ удовлетворяет уравнению Клейна—Гордона, поскольку оператор, переводящий в нуль вектор вакуума, не обязательно должен переводить в нуль все векторы $\mathfrak{H}$. Однако мы примем в качестве одного из принципов квантовой теории поля, что *каждое квантованное поле удовлетворяет уравнению Клейна—Гордона с* $m^2 \geqslant 0$ (т. е., в частности, уравнению Даламбера при $m=0$):

$$(\Box - m^2)\,\psi_\sigma(x) = 0. \tag{10.36}$$

Отметим, что уравнение (10.36) инвариантно относительно группы Пуанкаре и, как мы уже отметили для случая классических полей, обычно является следствием «динамических уравнений», которым подчиняется поле, или само играет роль такого уравнения. Впрочем, с излагаемой здесь групповой точки зрения роль таких уравнений состоит в выделении неприводимых полей, т. е. в описании кинематики простейших возможных полей; поэтому неоднократно обсуждавшийся вопрос, является ли уравнение Клейна—Гордона «динамическим уравнением», в настоящее время вряд ли имеет смысл.

Применяя к вектору вакуума сопряженные операторы поля $\overset{+}{\psi}_\sigma(x)$, мы получаем подпространство $\bar{\mathfrak{H}}_1$, порождаемое векторами

$$\Phi = \overset{+}{\psi}_\sigma(x)\,\Phi_0. \tag{10.37}$$

Как мы увидим в § 11, это подпространство, вообще говоря, отлично от описанного выше подпространства $\mathfrak{H}_1$ и должно поэтому рассматриваться как *другое* одночастичное пространство, связанное с тем же квантованным полем. Соответствующие частицы должны иметь ту же массу m, что и частицы, описываемые векторами (10.35), поскольку поле $\overset{+}{\psi}_\sigma(x)$ удовлетворяет тому же уравнению (10.36), что и $\psi_\sigma(x)$. Эти частицы называются *античастицами* по отношению к предыдущим и также считаются квантами рассматриваемого поля.

В случае *эрмитова* поля имеем $\overset{+}{\psi}_\sigma(x) = \psi_\sigma(x)$, $\bar{\mathfrak{H}}_1 = \mathfrak{H}_1$; в этом случае поле имеет кванты лишь одного вида, называемые «истинно нейтральными частицами». Желая сохранить утверждение, что «каждая частица имеет античастицу», говорят, что такие частицы совпадают со своими античастицами.

§ 11. Преобразования Фурье квантованных полей

Мы начнем с более простого случая «массивных» полей, т. е. полей, удовлетворяющих уравнению Клейна—Гордона с положительной массой. В этом параграфе рассматриваются только «массивные» квантованные поля.

«Релятивистский» интеграл Фурье. Как всегда, наряду с x-представлением квантованных полей существует равноправное ему p-представление. Преобразование Фурье квантованного поля $\psi_\sigma(x)$ задается интегралом

$$\psi_\sigma(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \tilde{\psi}_\sigma(p)\, e^{i(px)} dp, \tag{11.1}$$

где

$$(px) = p^0x^0 - p^1x^1 - p^2x^2 - p^3x^3 \tag{11.2}$$

есть скалярное произведение Минковского, а $dp = dp^0 dp^1 dp^2 dp^3$. Множитель перед интегралом соответствует принятому для тройного, а не четырехкратного преобразования Фурье; причина этого состоит в том, что после учета специфических свойств квантованного поля интеграл (11.1) сведется к тройному. В самом деле, в силу уравнения Клейна—Гордона должно быть

$$(p^2 - m^2)\tilde{\psi}_\sigma(p) = (p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2)\tilde{\psi}_\sigma(p) = 0. \tag{11.3}$$

Это значит, что $\tilde{\psi}_\sigma(p)$ — *обобщенная* функция, равная нулю вне гиперболоида

$$p^2 - m^2 = 0. \tag{11.4}$$

Простейшей (и притом лоренц-инвариантной) функцией такого рода является

$$\delta(p^2 - m^2) = \delta(p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2); \tag{11.5}$$

можно показать, что фурье-образ квантованного поля $\tilde{\psi}_\sigma(p)$ получается умножением обобщенной функции (11.5) на обычную дифференцируемую функцию, заданную на гиперболоиде (11.4). Далее удобно разбить интеграл (11.1) на две части, соответствующие $p^0 > 0$ и $p^0 < 0$; это позволит нам разделить состояния «с положительной и отрицательной частотой». Выполняя затем в интеграле с $p^0 < 0$ замену переменной $p^{0\prime} = -p^0$ и вводя функцию $\vartheta(p^0)$, равную единице при $p^0 > 0$ и нулю при $p^0 < 0$, имеем

$$\psi_\sigma(x) = \\ = (2\pi)^{-3/2} \int \{\alpha_\sigma(p) e^{-i(px)} + \overset{+}{\beta}_\sigma(p) e^{i(px)}\} \delta(p^2 - m^2)\vartheta(p^0)\,dp = \\ = (2\pi)^{-3/2} \int \{\alpha_\sigma(p) e^{-i(px)} + \overset{+}{\beta}_\sigma(p) e^{i(px)}\} \times \\ \times \delta(p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m^2)\vartheta(p^0)\,dp^0 d\boldsymbol{p}. \tag{11.6}$$

Здесь, по существу, два отдельных интеграла, соответствующих обеим полам гиперболоида, но для удобства оба они приведены к общей области интегрирования — положительной части гиперболоида. Операторные функции $\alpha_\sigma(p)$, $\overset{+}{\beta}_\sigma(p)$ называются соответственно «отрицательно-частотной» и «положительно-частотной» частями фурье-образа поля $\psi_\sigma(x)$. По существу $\alpha_\sigma(p)$ и $\overset{+}{\beta}_\sigma(p)$ суть операторы квантованного поля, заданные в иной форме. Они, конечно, также действуют на пространстве векторов состояния $\mathfrak{H}$. Обозначение $\overset{+}{\beta}_\sigma(p)$ (вместо $\beta_\sigma(p)$) выбрано по соображениям, которые скоро выяснятся. Заметим, что выделение «положительно-частотной» и «отрицательно-частотной» частей фурье-образа вытекает из того факта, что гиперболоид имеет две компоненты связности, но не зависит от выбора базиса в p-пространстве или в x-пространстве.

Выполним в (11.6) интегрирование по p^0 от 0 до ∞. Для этого введем новую переменную интегрирования

$$\xi=(p^0)^2-\boldsymbol{p}^2-m^2,\quad dp^0=\frac{d\xi}{2\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2+\xi}}; \qquad (11.7)$$

$$\psi_\sigma(x)=(2\pi)^{-3/2}\int\{\alpha_\sigma(\boldsymbol{p},\ \omega(p))\,e^{-i(px)}+ \\ +\overset{+}{\beta}_\sigma(\boldsymbol{p},\ \omega(\boldsymbol{p}))\,e^{i(px)}\}\frac{d\boldsymbol{p}}{2\omega(\boldsymbol{p})}, \qquad (11.8)$$

где

$$\omega(\boldsymbol{p})=p^0=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}, \qquad (11.9)$$

$$(px)=\omega(\boldsymbol{p})\,x^0-\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}. \qquad (11.10)$$

Переходя к сопряженным операторам, имеем

$$\overset{+}{\psi}_\sigma(x)=(2\pi)^{-3/2}\int\{\beta_\sigma(\boldsymbol{p},\ \omega(\boldsymbol{p}))\,e^{-i(px)}+ \\ +\overset{+}{\alpha}_\sigma(\boldsymbol{p},\omega(\boldsymbol{p}))\,e^{i(px)}\}\frac{d\boldsymbol{p}}{2\omega(\boldsymbol{p})}. \qquad (11.11)$$

Инвариантная мера. Чтобы лучше понять разложение Фурье (11.8), заметим, что α_σ, $\overset{+}{\beta}_\sigma$ — операторы, зависящие от точки передней полы гиперболоида $(p^0)^2-\boldsymbol{p}^2=m^2$, $p^0>0$, и интегрирование имеет простой геометрический смысл. Как можно показать,

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{\omega(\boldsymbol{p})}=\frac{d\boldsymbol{p}}{p^0} \qquad (11.12)$$

есть мера на гиперболоиде, инвариантная относительно преобразований Лоренца Λ (мы будем говорить просто «гиперболоид», подразумевая его переднюю полу). Это значит, что для любой площадки гиперболоида dS с проекцией на плоскость $p^0=0$ объема dp и для любого преобразования Лоренца Λ справедливо соотношение

$$\frac{dp'}{p'^0} = \frac{dp}{p^0}, \tag{11.13}$$

где dp' — объем проекции площадки $dS' = \Lambda(dS)$ на ту же плоскость $p^0=0$, а $p'^0 = (\Lambda p)^0$. Таким образом, в (11.8) интегрирование по гиперболоиду производится единственно правильным, а именно релятивистски инвариантным способом.

Преобразование фурье-образов. Из (11.6) сразу же следует, что преобразования Фурье квантованных полей также образуют представления группы Пуанкаре (одно для $\alpha_\sigma(p)$, другое для $\overset{+}{\beta}_\sigma(p)$). В самом деле, согласно (11.6)

$$\begin{aligned}\psi_\sigma(\Lambda x + a) &= (2\pi)^{-3/2} \int \{\alpha_\sigma(p)\, e^{-i(pa)} e^{-i(p,\,\Lambda x)} + \\ &\quad + \overset{+}{\beta}_\sigma(p)\, e^{i(pa)} e^{i(p,\,\Lambda x)}\}\, \delta(p^2 - m^2)\, \vartheta(p^0)\, dp = \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int \{\alpha_\sigma(p)\, e^{-i(pa)} e^{-i(\Lambda^{-1}p,\, x)} + \\ &\quad + \overset{+}{\beta}_\sigma(p)\, e^{i(pa)} e^{i(\Lambda^{-1}p,\, x)}\}\, \delta(p^2 - m^2)\, \vartheta(p^0)\, dp.\end{aligned}$$

Выполнив замену переменных $\Lambda^{-1}p = q$ и учитывая, что $p^2 = q^2$ и якобиан преобразования равен единице, т. е. $dp = dq$, вернемся затем к обозначению p для переменных интегрирования; тогда имеем

$$\begin{aligned}\psi_\sigma(\Lambda x + a) &= \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int \{\tilde{\alpha}_\sigma(p)\, e^{-i(px)} + \overset{+}{\tilde{\beta}}_\sigma(p)\, e^{i(px)}\}\, \delta(p^2 - m^2)\, \vartheta(p^0)\, dp = \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int \{\tilde{\alpha}_\sigma(p)\, e^{-i(px)} + \overset{+}{\tilde{\beta}}_\sigma(p)\, e^{i(px)}\}\, \frac{d\boldsymbol{p}}{2\omega(\boldsymbol{p})},\end{aligned} \tag{11.14}$$

где

$$\tilde{\alpha}_\sigma(p) = e^{-i(\Lambda p,\, a)} \alpha_\sigma(\Lambda p), \quad \overset{+}{\tilde{\beta}}_\sigma(p) = e^{i(\Lambda p,\, a)} \overset{+}{\beta}_\sigma(\Lambda p). \tag{11.15}$$

Таким образом, для $\psi_\sigma(\Lambda x + a)$ фурье-образами служат $\tilde{\alpha}_\sigma(p)$, $\overset{+}{\tilde{\beta}}_\sigma(p)$. В силу (10.14) для преобразованных полей $\psi'_\sigma(x)$, $\overset{+}{\psi}{}'_\sigma(x)$ имеем фурье-образы

$$\begin{aligned} \alpha'_\sigma(p) &= e^{-i(\Lambda p, a)} \sum_{\tau=-j}^{j} D^{(j)}_{\sigma\tau}[u^{-1}]\,\alpha_\tau(\Lambda p), \\ \overset{+}{\beta}{}'_\sigma(p) &= e^{i(\Lambda p, a)} \sum_{\tau=-j}^{j} D^{(j)}_{\sigma\tau}[u^{-1}]\,\overset{+}{\beta}_\tau(\Lambda p). \end{aligned} \tag{11.16}$$

Это и есть закон преобразования фурье-образов квантованных полей под действием группы Пуанкаре $\mathscr{P}^{\uparrow}_{+}$. Переходя к сопряженным операторам, получаем

$$\begin{aligned} \overset{+}{\alpha}{}'_\sigma(p) &= e^{i(\Lambda p, a)} \sum_{\tau=-j}^{j} \bar{D}^{(j)}_{\sigma\tau}[u^{-1}]\,\overset{+}{\alpha}_\tau(\Lambda p), \\ \beta'_\sigma(p) &= e^{-i(\Lambda p, a)} \sum_{\tau=-j}^{j} \bar{D}^{(j)}_{\sigma\tau}[u^{-1}]\,\beta_\tau(\Lambda p). \end{aligned} \tag{11.17}$$

В частном случае однородных преобразований закон преобразования фурье-образов можно записать в виде

$$\begin{aligned} \alpha'_\sigma(p) &= \sum_{\tau=-j}^{j} D^{(j)}_{\sigma\tau}[u^{-1}]\,\alpha_\tau(\Lambda p), \\ \overset{+}{\beta}{}'_\sigma(p) &= \sum_{\tau=-j}^{j} D^{(j)}_{\sigma\tau}[u^{-1}]\,\overset{+}{\beta}_\tau(\Lambda p), \end{aligned} \tag{11.18}$$

и соответственно

$$\begin{aligned} \overset{+}{\alpha}{}'_\sigma(p) &= \sum_{\tau=-j}^{j} \bar{D}^{(j)}_{\sigma\tau}[u^{-1}]\,\overset{+}{\alpha}_\tau(\Lambda p), \\ \beta'_\sigma(p) &= \sum_{\tau=-j}^{j} \bar{D}^{(j)}_{\sigma\tau}[u^{-1}]\,\beta_\tau(\Lambda p). \end{aligned} \tag{11.19}$$

Отсюда по самому определению преобразования квантованных полей (10.9) имеем

$$U[0,\ u]\,\alpha_\sigma(p)\,U^{-1}[0,\ u] = \sum_{\tau=-j}^{j} D^{(j)}_{\sigma\tau}[u^{-1}]\,\alpha_\tau(\Lambda p),$$
$$U[0,\ u]\,\overset{+}{\beta}_\sigma(p)\,U^{-1}[0,\ u] = \sum_{\tau=-j}^{j} D^{(j)}_{\sigma\tau}[u^{-1}]\,\overset{+}{\beta}_\tau(\Lambda p); \tag{11.20}$$

$$U[0,\ u]\,\overset{+}{\alpha}_\sigma(p)\,U^{-1}[0,\ u] = \sum_{\tau=-j}^{j} \bar{D}^{(j)}_{\sigma\tau}[u^{-1}]\,\overset{+}{\alpha}_\tau(\Lambda p),$$
$$U[0,\ u]\,\beta_\sigma(p)\,U^{-1}[0,\ u] = \sum_{\tau=-j}^{j} \bar{D}^{(j)}_{\sigma\tau}[u^{-1}]\,\beta_\tau(\Lambda p). \tag{11.21}$$

В случае сдвигов $(a,\ 1)$ из (11.16), (11.17) следует

$$\alpha'_\sigma(p) = e^{-i(\Lambda p,\ a)}\alpha_\sigma(p),$$
$$\overset{+}{\beta}{}'_\sigma(p) = e^{i(\Lambda p,\ a)}\overset{+}{\beta}_\sigma(p); \tag{11.22}$$

$$\overset{+}{\alpha}{}'_\sigma(p) = e^{i(\Lambda p,\ a)}\overset{+}{\alpha}_\sigma(p),$$
$$\beta'_\sigma(p) = e^{-i(\Lambda p,\ a)}\beta_\sigma(p); \tag{11.23}$$

откуда

$$U[a,\ 1]\,\alpha_\sigma(p)\,U^{-1}[a,\ 1] = e^{-i(\Lambda p,\ a)}\alpha_\sigma(p),$$
$$U[a,\ 1]\,\overset{+}{\beta}_\sigma(p)\,U^{-1}[a,\ 1] = e^{i(\Lambda p,\ a)}\overset{+}{\beta}_\sigma(p); \tag{11.24}$$

$$U[a,\ 1]\,\overset{+}{\alpha}_\sigma(p)\,U^{-1}[a,\ 1] = e^{i(\Lambda p,\ a)}\overset{+}{\alpha}_\sigma(p),$$
$$U[a,\ 1]\,\beta_\sigma(p)\,U^{-1}[a,\ 1] = e^{-i(\Lambda p,\ a)}\beta_\sigma(p). \tag{11.25}$$

Импульсы и квантованные поля. Займемся теперь перестановочными соотношениями, связывающими операторы импульса (см. (10.29), (10.32)) с фурье-образами квантованных полей. Дифференцируя по x^α интегралы (11.8), (11.11), имеем

$$[P_\tau,\ \alpha_\sigma(p)] = -p_\tau\alpha_\sigma(p),$$
$$[P_\tau,\ \overset{+}{\beta}_\sigma(p)] = p_\tau\overset{+}{\beta}_\sigma(p); \tag{11.26}$$

$$[P_\tau,\ \overset{+}{\alpha}_\sigma(p)] = p_\tau\overset{+}{\alpha}_\sigma(p),$$
$$[P_\tau,\ \beta_\sigma(p)] = -p_\tau\beta_\sigma(p), \tag{11.27}$$

Выделение положительно-частотной и отрицательно-частотной частей квантованного поля в результате перехода к p-представлению позволяет дать более отчетливое физическое истолкование операторов поля по сравнению с § 10. В самом деле, пусть квантовая система находится в состоянии с определенным значением импульса p. Не учитывая других возможных квантовых чисел, обозначим вектор состояния с определенным значением импульса $\tilde{p}$ через $|\tilde{p}\rangle$:

$$P|\tilde{p}\rangle = \tilde{p}|\tilde{p}\rangle. \tag{11.28}$$

Тогда с помощью (11.26) находим

$$\begin{gathered} P\alpha_\sigma(p)|\tilde{p}\rangle = \alpha_\sigma(p)P|\tilde{p}\rangle - p\alpha_\sigma(p)|\tilde{p}\rangle, \\ P\alpha_\sigma(p)|\tilde{p}\rangle = (\tilde{p} - p)\alpha_\sigma(p)|\tilde{p}\rangle, \end{gathered} \tag{11.29}$$

и аналогично с помощью (11.27)

$$P\overset{+}{\alpha}_\sigma(p)|\tilde{p}\rangle = (\tilde{p} + p)\overset{+}{\alpha}_\sigma(p)|\tilde{p}\rangle. \tag{11.30}$$

Точно так же с помощью (11.26) и (11.27) получаем

$$P\beta_\sigma(p)|\tilde{p}\rangle = (\tilde{p} - p)\beta_\sigma(p)|\tilde{p}\rangle, \tag{11.31}$$

$$P\overset{+}{\beta}_\sigma(p)|\tilde{p}\rangle = (\tilde{p} + p)\overset{+}{\beta}_\sigma(p)|\tilde{p}\rangle. \tag{11.32}$$

Полученные соотношения (11.29)—(11.32) можно истолковать следующим образом. Поскольку аргумент p пробегает переднюю полу гиперболоида, то $p^0 > 0$. Поэтому (11.29) означает, что действие оператора $\alpha_\sigma(p)$ уменьшает энергию системы, а (11.30) — что действие оператора $\overset{+}{\alpha}_\sigma(p)$ увеличивает эту энергию. Более того, можно показать, что энергия изменяется по крайней мере на m: в самом деле, поскольку p принадлежит гиперболоиду $(p^0)^0 - \boldsymbol{p}^2 = m^2$, то увеличение или уменьшение энергии происходит порциями, не меньшими m. Можно истолковать это следующим образом: оператор $\overset{+}{\alpha}_\sigma(p)$ (и аналогично $\overset{+}{\beta}_\sigma(p)$) связан с рождением частицы, а оператор $\alpha_\sigma(p)$ (и аналогично $\beta_\sigma(p)$) — с уничтожением частицы.

Эти частицы, однако, различны для операторов α и β. В самом деле, из (11.21), (11.20) видно, что состояния $\overset{+}{\alpha}_\sigma(p)\Phi_0$ преобразуются по представлению группы Пуанкаре типа $(0,\ j)$, тогда как $\overset{+}{\beta}_\sigma(p)\Phi_0$ — по представлению типа $(j,\ 0)$. Так как энергия вакуума не может быть понижена, должно быть $\alpha_\sigma(p)\Phi_0=\beta_\sigma(p)\Phi_0=0$; следовательно, в силу преобразований Фурье (11.8), (11.11) векторы состояния $\psi_\sigma(x)\Phi_0$ линейно выражаются через $\overset{+}{\beta}_\sigma(p)\Phi_0$ и обратно, соответственно векторы состояния $\overset{+}{\psi}_\sigma(p)\Phi_0$ линейно выражаются через $\overset{+}{\alpha}_\sigma(p)\Phi_0$ и обратно. Это значит, что векторы первого вида принадлежат описанному в конце § 10 одночастичному подпространству $\bar{\mathfrak{H}}_1$, а векторы второго вида — подпространству $\mathfrak{H}_1$. Первое из них мы будем (чисто условно) связывать с античастицами, а второе — с частицами, называя те и другие квантами поля. При этом в частных случаях может оказаться, что операторы поля $\psi_\sigma(x)$ эрмитовы; тогда $\alpha_\sigma(p)=\beta_\sigma(p)$, и у поля имеются кванты лишь одного вида («истинно нейтральные» частицы).

Сопоставляя сказанное выше, естественно предположить, что

$\alpha_\sigma(p)$ связан с уничтожением частицы импульса p,
$\overset{+}{\alpha}_\sigma(p)$ — с рождением частицы импульса p и аналогично
$\beta_\sigma(p)$ связан с уничтожением античастицы импульса p,
$\overset{+}{\beta}_\sigma(p)$ — с рождением античастицы импульса p.

Этим объясняются и принятые выше обозначения: буква α относится к частицам, β — к античастицам, знак плюс — к рождению, отсутствие знака — к уничтожению.

Однако мы до сих пор не имеем перестановочных соотношений для самих операторов $\alpha_\sigma(p)$, $\overset{+}{\alpha}_\sigma(p)$, $\beta_\sigma(p)$, $\overset{+}{\beta}_\sigma(p)$. Мы и не будем искать их, поскольку перестановочные соотношения между фурье-образами, совместимые с законами преобразования (11.20), (11.21), оказываются сложными и неудобными. Вместо этого мы покажем, что из этих фурье-образов можно построить линейные комбинации с коэффициентами, зависящими от p, которые связаны простыми и естественными перестановочными соотношениями. Это и составляет содержание известной теоремы С. Вайнберга, к которой мы придем, впрочем, в известном смысле обратным путем. Возникающая здесь ситуация не сводится к соображениям удобства описания, но имеет более глубокий смысл. Будем, для определенности, работать в p-представлении. Тогда либо мы описываем квантовую систему с помощью *поля*, и тогда имеем простой закон групповых преобразований, но сложные перестановочные соотношения; либо мы описываем ту же систему с помощью *операторов рождения и уничтожения* с простыми перестановочными соотношениями, но сложным законом групповых преобразований. Каждый способ описания связан с определенными аспектами поведения системы. В частности, второй способ позволит нам дать физическое истолкование индекса σ, связав его со значениями «проекции спина» частицы.

§ 12. Теорема Вайнберга о связи полей с частицами

Операторы рождения и уничтожения частиц. По определению мы назовем так операторы $\overset{+}{a}_\sigma(\boldsymbol{p})$, $a_\sigma(\boldsymbol{p})$, $\overset{+}{b}_\sigma(\boldsymbol{p})$, $b_\sigma(\boldsymbol{p})$ ($\sigma=-j, -j+1, \ldots, j-1, j$), действующие на пространстве состояний квантовой системы $\mathfrak{H}$ и удовлетворяющие следующим перестановочным соотношениям [1]:

$$\begin{aligned} [a_\sigma(\boldsymbol{p}), \overset{+}{a}_\tau(\boldsymbol{p})]_\pm &= \delta_{\sigma\tau}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'), \\ [b_\sigma(\boldsymbol{p}), \overset{+}{b}_\tau(\boldsymbol{p})]_\pm &= \delta_{\sigma\tau}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'); \end{aligned} \tag{12.1}$$

во всех же других случаях перестановочные друг с другом. В соотношениях (12.1) мы воспользовались новым обозначением аргумента: поскольку все операторы рассматриваются как функции от точки гиперболоида

$$(p^0)^2-\boldsymbol{p}^2=m^2, \quad p^0>0, \tag{12.2}$$

достаточно задать вместо p свободно меняющийся трехмерный вектор импульса $\boldsymbol{p}$. Смысл перестановочных соотношений (12.1) можно пояснить следующим образом (мы ограничимся случаем коммутаторов $[\ ]_-$).

Оператор $\overset{+}{a}_\sigma(\boldsymbol{p})$ прибавляет к системе новую частицу с импульсом $\boldsymbol{p}$ и «состоянием поляризации» σ

---

[1]) Как мы увидим в § 13, коммутаторы следует брать в случае бозонов, а антикоммутаторы — в случае фермионов.

(это понятие будет разъяснено в дальнейшем; пока достаточно представлять себе, что частицы с данным импульсом p могут различаться еще одной характеристикой, также возникающей из группы Пуанкаре). Оператор $a_\sigma(p)$ уничтожает частицу с только что описанными свойствами, если она имеется при заданном состоянии системы. Аналогичную роль играют операторы $\overset{+}{b}_\tau(p)$, $b_\tau(p)$ для античастиц.

Перестановочные соотношения при $\sigma \neq \tau$ или $p \neq p'$ означают, что создание и уничтожение частиц с разными характеристиками суть независимые операции, порядок которых безразличен. Напротив, порядок операций существен, если характеристики частиц совпадают. Это проще всего понять, рассматривая дискретный аналог соотношений (12.1), в котором p может принимать лишь изолированные значения: $[\alpha_\sigma(p_i), \overset{+}{\alpha}_\tau(p_k)] = \delta_{\sigma\tau}\delta_{ik}$; при $\sigma = \tau$, $i = k$ имеем

$$a_\sigma(p_i)\overset{+}{a}_\sigma(p_i) = \overset{+}{a}_\sigma(p_i)a_\sigma(p_i) + 1.$$

Применим это соотношение к вектору вакуума Φ_0, учитывая, что $a_\sigma(p)\Phi_0 = 0$; тогда имеем $a_\sigma(p_i)\overset{+}{a}_\sigma(p_i)\Phi_0 = \Phi_0$. Это значит, что рождение из вакуума частицы с характеристиками (p, σ), а затем уничтожение такой же частицы возвращает систему к исходному состоянию.

Мы видим, таким образом, что вид перестановочных соотношений однозначно определяется смыслом операторов рождения и уничтожения, во всяком случае в дискретном варианте. По поводу естественного обобщения на случай непрерывно меняющегося импульса, содержащегося в (12.1), мы ограничимся здесь кратким замечанием[1]).

Строго говоря, все рассматриваемые здесь операторы представляют собой обобщенные функции от p с операторными значениями. Иначе говоря, действие такого оператора на вектор пространства $\mathfrak{H}$ непосредственно не определено (или, как говорят в таких

---

[1]) Подробную трактовку операторов рождения и уничтожения как в дискретном, так и непрерывном случае можно найти в [10].

случаях, «приводит к вектору, не принадлежащему гильбертову пространству $\mathfrak{H}$».

Но если «усреднить» такой оператор, например $a_\sigma(\boldsymbol{p})$, т. е. умножить его на дифференцируемую, быстро убывающую на бесконечности функцию $\varphi(\boldsymbol{p})$ и проинтегрировать по $\boldsymbol{p}$, то получается уже «обычный» оператор

$$a_\sigma(\varphi)=\int a_\sigma(\boldsymbol{p})\,\varphi(\boldsymbol{p})\,d\boldsymbol{p}, \tag{12.3}$$

переводящий векторы $\mathfrak{H}$ в векторы того же пространства. Точный смысл перестановочных соотношений (12.1) раскрывается после усреднения: умножая $a_\sigma(\boldsymbol{p})$ на $\varphi(\boldsymbol{p})$, $a_\tau(\boldsymbol{p}')$ на $\bar{\chi}(\boldsymbol{p}')$ и интегрируя по $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}'$, находим для всех φ, χ:

$$[a_\sigma(\varphi),\ \overset{+}{a}_\tau(\bar{\chi})]_\pm=\delta_{\sigma\tau}\langle\chi\,|\,\varphi\rangle, \tag{12.4}$$

где

$$\langle\chi\,|\,\varphi\rangle=\int\bar{\chi}(\boldsymbol{p})\,\varphi(\boldsymbol{p})\,d\boldsymbol{p}. \tag{12.5}$$

Имея в виду этот точный смысл, мы не будем в дальнейшем возвращаться к усреднениям, поскольку математически строгое построение квантовой теории поля выходит за рамки этой книги (см. [10, 2]). Подчеркнем, что мы исходим из квантованных полей, заданных их фурье-образами $\alpha_\sigma(\boldsymbol{p})$, $\overset{+}{\alpha}_\sigma(\boldsymbol{p})$, $\beta_\sigma(\boldsymbol{p})$, $\overset{+}{\beta}_\sigma(\boldsymbol{p})$, и операторы рождения и уничтожения должны быть построены по этим полям. Мы покажем, что *для частиц положительной массы такие операторы существуют и связаны с полевыми операторами линейными соотношениями*

$$\begin{aligned}\alpha_\sigma(\boldsymbol{p})&=\sum_{\tau=-j}^{j}X_{\sigma\tau}(\boldsymbol{p})\,a_\tau(\boldsymbol{p}),\\ \overset{+}{\beta}_\sigma(\boldsymbol{p})&=\sum_{\tau=-j}^{j}Y_{\sigma\tau}(\boldsymbol{p})\,\overset{+}{\beta}_\tau(\boldsymbol{p}),\end{aligned} \tag{12.6}$$

где $X_{\sigma\tau}(\boldsymbol{p})$ и $Y_{\sigma\tau}(\boldsymbol{p})$ — различные для различных полей коэффициенты, вид которых однозначно (с точностью до тривиальной нормировки) определяется методами теории групп из трансформационных свойств квантованных полей. В этом и состоит теорема Вайнберга.

В традиционном изложении коэффициенты определяются, исходя из уравнений для соответствующих классических полей, которые подвергаются так называемому квантованию; при нашем изложении эти соображения оказываются излишними.

Как видно из формул (12.6), компонента квантованного поля $\psi_\sigma(x)$ не является суперпозицией операторов $a_\sigma(\boldsymbol{p})$ и $\overset{+}{b}_\sigma(\boldsymbol{p})$, относящихся к одной определенной «поляризации» кванта, а наоборот, является суперпозицией всех значений «поляризации» σ от $-j$ до j. Как принято говорить в квантовой механике, фурье-образы $\alpha_\sigma(\boldsymbol{p})$ и $\overset{+}{\beta}_\sigma(\boldsymbol{p})$ относятся к «пакету», составленному из всех возможных проекций спина, входящих в «пакет» с интенсивностями $|X_{\sigma\tau}(\boldsymbol{p})|^2$ и $|Y_{\sigma\tau}(\boldsymbol{p})|^2$. Функция $\psi_\sigma(x)$ описывает поле с заданным числом компонент $2j+1$. Если $X_{\sigma\tau}(\boldsymbol{p})$ и $Y_{\sigma\tau}(\boldsymbol{p})$ являются *квадратными* матрицами, то число компонент совпадает с числом возможных спиновых состояний кванта этого поля. Как мы увидим, для массивных полей оказывается возможным выбрать в (12.6) квадратные матрицы.

Теорема Вайнберга. Итак, мы должны решить следующую задачу.

Даны формулы преобразования для фурье-образов (11.20), (11.21), в которых мы положим $U[0, u] = U[u]$, $\alpha(\omega(p), p) = \alpha(\boldsymbol{p})$, $\beta(\omega(p), p) = \beta(\boldsymbol{p})$, и перестановочные соотношения для операторов рождения и уничтожения (12.1). Следует найти коэффициенты $X_{\sigma\tau}(\boldsymbol{p})$ и $Y_{\sigma\tau}(\boldsymbol{p})$ в формулах (12.6).

Из (11.20) и (12.6) имеем формулу преобразования для операторов $a_\sigma(\boldsymbol{p})$

$$a'_\sigma(\boldsymbol{p}) = U[u]\, a_\sigma(\boldsymbol{p})\, U^{-1}[u] =$$
$$= \sum_{\mu,\nu,\varkappa} \{X^{-1}_{\sigma\mu}(\boldsymbol{p})\, D_{\mu\nu}[u^{-1}]\, X_{\nu\varkappa}(\overrightarrow{\Lambda p})\}\, a_\varkappa(\overrightarrow{\Lambda p}) =$$
$$= \sum_\varkappa M_{\sigma\varkappa}[u, \boldsymbol{p}]\, a_\varkappa(\overrightarrow{\Lambda p}), \qquad (12.7)$$

где

$$M[u, \boldsymbol{p}] = X^{-1}(\boldsymbol{p})\, D[u^{-1}]\, X(\overrightarrow{\Lambda p}). \tag{12.8}$$

Докажем, что матрица $M[u, \boldsymbol{p}]$ кратна унитарной. Переходя в (12.7) к сопряженным операторам, получаем

$$\overset{+}{a}{}'_{\tau}(\boldsymbol{p}') = U[u]\, \overset{+}{a}_{\tau}(\boldsymbol{p}')\, U^{-1}[u] = \sum_{\lambda} \bar{M}_{\tau\lambda}[u, \boldsymbol{p}']\, \overset{+}{a}_{\lambda}(\overrightarrow{\Lambda p'}). \tag{12.9}$$

Применим перестановочные соотношения (12.1) к преобразованным операторам (12.7), (12.9), а затем к исходным:

$$\begin{aligned}\delta_{\sigma\tau}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') &= [a'_{\sigma}(\boldsymbol{p}),\ \overset{+}{a}{}'_{\tau}(\boldsymbol{p}')]_{\pm} = \\ &= \sum_{\varkappa, \lambda} M_{\sigma\varkappa}[u, \boldsymbol{p}]\, \bar{M}_{\tau\lambda}[u, \boldsymbol{p}']\, [a_{\varkappa}(\overrightarrow{\Lambda p}),\ \overset{+}{a}_{\lambda}(\overrightarrow{\Lambda p'})]_{\pm} = \\ &= \sum_{\varkappa, \lambda} M_{\sigma\varkappa}[u, \boldsymbol{p}]\, \bar{M}_{\tau\lambda}[u, \boldsymbol{p}']\, \delta_{\varkappa\lambda}\delta(\overrightarrow{\Lambda p} - \overrightarrow{\Lambda p'}) = \\ &= \sum_{\varkappa} M_{\sigma\varkappa}[u, \boldsymbol{p}]\, \overset{+}{M}_{\varkappa\tau}[u, \boldsymbol{p}']\, \delta(\overrightarrow{\Lambda p} - \overrightarrow{\Lambda p'}).\end{aligned} \tag{12.10}$$

Для вычисления $\delta(\overrightarrow{\Lambda p} - \overrightarrow{\Lambda p'})$ заметим, что выражение $\omega(\boldsymbol{p})\,\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$ есть четырехмерный инвариант, т. е.

$$\omega(\boldsymbol{p})\,\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') = \omega(\overrightarrow{\Lambda p})\,\delta(\overrightarrow{\Lambda p} - \overrightarrow{\Lambda p'}) \tag{12.11}$$

(см. Приложение I). Ввиду (12.11) из (12.10) следует

$$\delta_{\sigma\tau} = \frac{\omega(\boldsymbol{p})}{\omega(\overrightarrow{\Lambda p})} \sum_{\varkappa} M_{\sigma\varkappa}[u, \boldsymbol{p}]\, \overset{+}{M}_{\varkappa\tau}[u, \boldsymbol{p}].$$

Это значит, что

$$\begin{aligned}N[u, \boldsymbol{p}] &= \sqrt{\frac{\omega(\boldsymbol{p})}{\omega(\overrightarrow{\Lambda p})}}\, M[u, \boldsymbol{p}] = \\ &= \sqrt{2\omega(\boldsymbol{p})}\, X^{-1}(\boldsymbol{p})\, D[u^{-1}]\, \frac{X(\overrightarrow{\Lambda p})}{\sqrt{2\omega(\overrightarrow{\Lambda p})}}\end{aligned} \tag{12.12}$$

является унитарной матрицей, т. е.

$$\sum_{\rho} \bar{N}_{\sigma\rho}[u, \boldsymbol{p}]\, N_{\tau\rho}[u, \boldsymbol{p}] = \delta_{\sigma\tau}.$$

Подставим теперь в (12.12) вместо $D[u^{-1}]$ выражение этой матрицы через произведение буста, вращения и антибуста; согласно (5.24)

$$u = b(\overrightarrow{\Lambda p})\, r[u,\ \boldsymbol{p}]\, b^{-1}(\boldsymbol{p}),$$
$$u^{-1} = b(\boldsymbol{p})\, r^{-1}[u,\ \boldsymbol{p}]\, b^{-1}(\overrightarrow{\Lambda p}), \tag{12.13}$$

и в представлении размерности $2j+1$ получаем

$$D[u] = B(\overrightarrow{\Lambda p})\, R[u,\ \boldsymbol{p}]\, B^{-1}(\boldsymbol{p}),$$
$$D[u^{-1}] = B(\boldsymbol{p})\, R^{-1}[u,\ \boldsymbol{p}]\, B^{-1}(\overrightarrow{\Lambda p}).$$

Вводя

$$F(\boldsymbol{p}) = \sqrt{2\omega(\boldsymbol{p})}\, X^{-1}(\boldsymbol{p})\, B(\boldsymbol{p}), \tag{12.14}$$

можно записать матрицы (12.12) в виде

$$N[u,\ \boldsymbol{p}] =$$
$$= \left\{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{p})}X^{-1}(\boldsymbol{p})B(\boldsymbol{p})\right\} R^{-1}[u, \boldsymbol{p}] \left\{B^{-1}(\overrightarrow{\Lambda p})X(\overrightarrow{\Lambda p})\frac{1}{\sqrt{2\omega(\overrightarrow{\Lambda p})}}\right\} =$$
$$= F(\boldsymbol{p})\, R^{-1}[u,\ \boldsymbol{p}]\, F^{-1}(\overrightarrow{\Lambda p}). \tag{12.15}$$

Из (12.15) имеем

$$\overset{+}{N}[u,\ \boldsymbol{p}] = \overset{+}{F}{}^{-1}(\overrightarrow{\Lambda p})\, R[u,\ \boldsymbol{p}]\, \overset{+}{F}(\boldsymbol{p}),$$
$$N^{-1}[u,\ \boldsymbol{p}] = F(\overrightarrow{\Lambda p})\, R[u,\ \boldsymbol{p}]\, F^{-1}(\boldsymbol{p}), \tag{12.16}$$

и из унитарности N следует

$$R^{-1}[u,\ \boldsymbol{p}]\, \overset{+}{F}(\overrightarrow{\Lambda p})\, F(\overrightarrow{\Lambda p})\, R[u,\ \boldsymbol{p}] = \overset{+}{F}(\boldsymbol{p})\, F(p). \tag{12.17}$$

Возьмем, в частности, в качестве u антибуст $b^{-1}(\boldsymbol{p})$. Тогда $\Lambda p = \mathrm{m}$, и в формуле (12.13) $b(\overrightarrow{\Lambda p}) = b(\vec{0}) = 1$, откуда $r[u,\ \boldsymbol{p}] = 1$, $R[u,\ \boldsymbol{p}] = 1$. Поэтому в рассматриваемом частном случае $u = b^{-1}(\boldsymbol{p})$ (12.17) принимает вид

$$\overset{+}{F}(\vec{0})\, F(\vec{0}) = \overset{+}{F}(\boldsymbol{p})\, F(\boldsymbol{p}). \tag{12.18}$$

Таким образом, матрица $\overset{+}{F}F$ не зависит от $\boldsymbol{p}$. Возвращаясь к общему случаю (12.17), мы видим, что матрица

$\overset{+}{F}F$ перестановочна со всеми матрицами $R\,[u,\ \boldsymbol{p}]$ неприводимого представления группы вращений $D^{(j)}[r]$. По лемме Шура (см. Приложение II), матрица $\overset{+}{F}F$ кратна единичной матрице. Заметим еще, что матрица вида $\overset{+}{F}F$ всегда положительно определенна, так что $\overset{+}{F}F=c\cdot 1$, где $c>0$. В силу строения формулы (12.15) мы можем ввести в $X(\boldsymbol{p})$ любой ненулевой множитель, что отражается лишь на нормировке поля. Выберем этот множитель таким образом, чтобы было

$$\overset{+}{F}F=1. \tag{12.19}$$

Тогда матрица F оказывается унитарной и, согласно (12.14), (12.6),

$$X(\boldsymbol{p})=\sqrt{2\omega(\boldsymbol{p})}\,B(\boldsymbol{p})\overset{+}{F}, \tag{12.20}$$

$$a_\sigma(\boldsymbol{p})=\sum_{\rho,\tau}\sqrt{2\omega(\boldsymbol{p})}\,B_{\sigma\rho}(\boldsymbol{p})\overset{+}{F}_{\rho\tau}a_\tau(\boldsymbol{p}). \tag{12.21}$$

Покажем теперь, что ввиду унитарности F операторы

$$a'_\sigma(\boldsymbol{p})=\sum_\varkappa \overset{+}{F}_{\sigma\varkappa}a_\varkappa(\boldsymbol{p}) \tag{12.22}$$

также удовлетворяют перестановочным соотношениям (12.1).

Поскольку $\overset{+}{F}_{\sigma\varkappa}=\bar{F}_{\varkappa\sigma}$, имеем

$$[a'_\sigma(\boldsymbol{p}),\ \overset{+}{a}{}'_\tau(\boldsymbol{p}')]_\pm=\Big[\sum_\varkappa \overset{+}{F}_{\sigma\varkappa}a_\varkappa(\boldsymbol{p}),\ \sum_\lambda F_{\lambda\tau}\overset{+}{a}_\lambda(\boldsymbol{p}')\Big]_\pm=$$

$$=\sum_{\varkappa,\lambda}\bar{F}_{\varkappa\sigma}F_{\lambda\tau}\delta_{\varkappa\lambda}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')=\delta_{\sigma\tau}\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}').$$

Простейшая нормировка операторов $a_\sigma(\boldsymbol{p})$ получается, если взять матрицу F не зависящей от $\boldsymbol{p}$. Лишь при этом условии в случае вращений $u=r$ состояния $|\boldsymbol{p},\ \sigma\rangle$ с определенными значениями импульса и спина преобразуются по одному и тому же представлению группы вращений, в соответствии с обычным физическим истолкованием спина (ср. определение (14.1) и (12.33), где $R\,[r,\ \boldsymbol{p}]\equiv r$). Наконец, переходя к другому базису в пространстве представления $D^{(j)}$, можно считать

$F=1$. Используя формулы (12.20), (12.21), (12.15), (12.12) и (12.7), получаем окончательно

$$X(\boldsymbol{p}) = \sqrt{2\omega(\boldsymbol{p})}\, B(\boldsymbol{p}), \tag{12.23}$$

$$\alpha_\sigma(\boldsymbol{p}) = \sum_\tau \sqrt{2\omega(\boldsymbol{p})}\, B_{\sigma\tau}(\boldsymbol{p})\, a_\tau(\boldsymbol{p}), \tag{12.24}$$

$$M[u, \boldsymbol{p}] = \sqrt{\frac{\omega(\overrightarrow{\Lambda p})}{\omega(\boldsymbol{p})}}\, N[u, \boldsymbol{p}] = \sqrt{\frac{\omega(\overrightarrow{\Lambda p})}{\omega(\boldsymbol{p})}}\, R^{-1}[u, \boldsymbol{p}], \tag{12.25}$$

$$U[u]\, a_\sigma(\boldsymbol{p})\, U^{-1}[u] = \sqrt{\frac{\omega(\overrightarrow{\Lambda p})}{\omega(\boldsymbol{p})}} \sum_\tau R^{-1}_{\sigma\tau}[u, \boldsymbol{p}]\, a_\tau(\overrightarrow{\Lambda p}). \tag{12.26}$$

Из (12.24) сопряжением операторов находим

$$\overset{+}{\alpha}_\sigma(\boldsymbol{p}) = \sum_\tau \sqrt{2\omega(\boldsymbol{p})}\, \bar{B}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{p})\, \overset{+}{a}_\tau(\boldsymbol{p}), \tag{12.27}$$

а из (12.26) закон преобразования операторов $\overset{+}{a}_\sigma(\boldsymbol{p})$:

$$U[u]\, \overset{+}{a}_\sigma(\boldsymbol{p})\, U^{-1}[u] = \sqrt{\frac{\omega(\overrightarrow{\Lambda p})}{\omega(\boldsymbol{p})}} \sum_\tau \bar{R}^{-1}_{\sigma\tau}[u, \boldsymbol{p}]\, \overset{+}{a}_\tau(\overrightarrow{\Lambda p}). \tag{12.28}$$

Для операторов $b_\sigma(\boldsymbol{p})$, $\overset{+}{b}_\sigma(\boldsymbol{p})$ вычисления производятся совершенно аналогично. Перестановочные соотношения (12.1) остаются прежними, но вместо первой формулы (11.20), которой мы пользовались для преобразования $\alpha_\sigma(\boldsymbol{p})$, придется применить для $\beta_\sigma(\boldsymbol{p})$ вторую формулу (11.21). Вследствие этого матрицы $D^{(j)}$ заменятся в вычислениях на $\bar{D}^{(j)}$ и, в частности, $B(\boldsymbol{p})$ на $\bar{B}(\boldsymbol{p})$. Нормирующую унитарную матрицу F (см. (12.20)) теперь удобно выбрать иначе. Именно, если взять в качестве F матрицу $C = C^{(j)}$, то имеем $C\bar{R}^{-1}C^{-1} = R^{-1}$ (см. (9.35)), и из (12.15) получаем для $b_\sigma(\boldsymbol{p})$ тот же закон преобразования (12.26), что для $a_\sigma(\boldsymbol{p})$; это приводит к однозначной процедуре в случае «истинно нейтральных частиц», когда $\beta_\sigma(\boldsymbol{p}) = \alpha_\sigma(\boldsymbol{p})$.

Итак, вместо (12.24) получаем

$$\beta_\sigma(\boldsymbol{p}) = \sum_{\rho, \tau} \sqrt{2\omega(\boldsymbol{p})}\, \bar{B}_{\sigma\rho}(\boldsymbol{p})\, \overset{+}{C}_{\rho\tau} b_\tau(\boldsymbol{p}), \tag{12.29}$$

а вместо (12.26)

$$U[u]b_\sigma(\boldsymbol{p})U^{-1}[u]=\sqrt{\frac{\omega(\overrightarrow{\Lambda p})}{\omega(\boldsymbol{p})}}\sum_\tau R^{-1}_{\sigma\tau}[u,\boldsymbol{p}]b_\tau(\overrightarrow{\Lambda p}). \quad (12.30)$$

Переходя в (12.29) к сопряженным операторам, имеем

$$\overset{+}{\beta}_\sigma(\boldsymbol{p})=\sum_{\rho,\tau}\sqrt{2\omega(\boldsymbol{p})}\,B_{\sigma\rho}(\boldsymbol{p})\,C_{\tau\rho}\overset{+}{b}_\tau(\boldsymbol{p}). \quad (12.31)$$

Точно так же из (12.30) получается

$$U[u]\overset{+}{b}_\sigma(\boldsymbol{p})U^{-1}[u]=$$
$$=\sqrt{\frac{\omega(\overrightarrow{\Lambda p})}{\omega(\boldsymbol{p})}}\sum_\tau \bar{R}^{-1}_{\sigma\tau}[u,\boldsymbol{p}]\overset{+}{b}_\tau(\overrightarrow{\Lambda p}). \quad (12.32)$$

Очевидно, преобразования операторов рождения и уничтожения, соответствующие сдвигам, точно такие же, как для операторов α, $\overset{+}{\alpha}$, β, $\overset{+}{\beta}$, с которыми они связаны линейными соотношениями; в самом деле, показательные множители в правых частях (11.24), (11.25) зависят лишь от $\boldsymbol{p}$, но не от σ. Отсюда получаются общие правила преобразования:

$$U[a,u]a_\sigma(\boldsymbol{p})U^{-1}[a,u]=$$
$$=e^{-i(\Lambda p,a)}\sqrt{\frac{\omega(\overrightarrow{\Lambda p})}{\omega(\boldsymbol{p})}}\sum_\tau R^{-1}_{\sigma\tau}[u,\boldsymbol{p}]\,a_\tau(\overrightarrow{\Lambda p}),$$
$$U[a,u]b_\sigma(\boldsymbol{p})U^{-1}[a,u]=$$
$$=e^{-i(\Lambda p,a)}\sqrt{\frac{\omega(\overrightarrow{\Lambda p})}{\omega(\boldsymbol{p})}}\sum_\tau R^{-1}_{\sigma\tau}[u,\boldsymbol{p}]b_\tau(\overrightarrow{\Lambda p}),$$
$$U[a,u]\overset{+}{a}_\sigma(\boldsymbol{p})U^{-1}[a,u]= \quad (12.33)$$
$$=e^{i(\Lambda p,a)}\sqrt{\frac{\omega(\overrightarrow{\Lambda p})}{\omega(\boldsymbol{p})}}\sum_\tau \bar{R}^{-1}_{\sigma\tau}[u,\boldsymbol{p}]\overset{+}{a}_\tau(\Lambda p),$$
$$U[a,u]\overset{+}{b}_\sigma(\boldsymbol{p})U^{-1}[a,u]=$$
$$=e^{i(\Lambda p,a)}\sqrt{\frac{\omega(\overrightarrow{\Lambda p})}{\omega(\boldsymbol{p})}}\sum_\tau \bar{R}^{-1}_{\sigma\tau}[u,\boldsymbol{p}]\overset{+}{b}_\tau(\Lambda p).$$

Подставляя выражения (12.24), (12.31) в (11.8), получаем

$$\psi_\sigma(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \sum_{\tau=-j}^{j} B_{\sigma\tau}(\boldsymbol{p}) \left\{ a_\tau(\boldsymbol{p})\, e^{-i(px)} + \sum_{\rho=-j}^{j} \overset{+}{C}_{\tau\rho} \overset{+}{b}_\rho(\boldsymbol{p})\, e^{i(px)} \right\} \frac{d\boldsymbol{p}}{2\omega(\boldsymbol{p})}. \qquad (12.34)$$

Наконец, используя формулу (9.48) для $C^{(j)}$, имеем

$$\psi_\sigma(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \sum_{\tau=-j}^{j} B_{\sigma\tau}(\boldsymbol{p}) \{ a_\tau(\boldsymbol{p})\, e^{-i(px)} + (-1)^{j+\tau} \overset{+}{b}_{-\tau}(\boldsymbol{p})\, e^{i(px)} \} \frac{d\boldsymbol{p}}{2\omega(\boldsymbol{p})}. \qquad (12.35)$$

Найдем сопряженный оператор $\overset{+}{\psi}_\sigma(x)$:

$$\overset{+}{\psi}_\sigma(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \sum_{\tau=-j}^{j} \bar{B}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{p}) \{ \overset{+}{a}_\tau(\boldsymbol{p})\, e^{i(px)} + (-1)^{j+\tau} b_{-\tau}(\boldsymbol{p})\, e^{-i(px)} \} \frac{d\boldsymbol{p}}{\sqrt{2\omega(\boldsymbol{p})}}. \qquad (12.36)$$

Заключительные замечания. Формулы (12.35), (12.36) оправдывают данное в § 10 истолкование подпространств $\mathfrak{H}_1$, $\bar{\mathfrak{H}}_1$ как одночастичных подпространств, первое из которых содержит векторы состояний античастиц, а второе — частиц. В самом деле, согласно (12.35) векторы $\psi_\sigma(x)\,\Phi_0$ являются линейными комбинациями векторов $\overset{+}{b}_\sigma(\boldsymbol{p})\,\Phi_0$, так как $a_\sigma(\boldsymbol{p})$ переводят вектор вакуума в нуль. Но операторы $\overset{+}{b}_\sigma(\boldsymbol{p})$ порождают из вакуума античастицы; линейные комбинации их также изображают состояния с одной античастицей, характеристики которой $\boldsymbol{p}$, σ могут быть неопределенными. Аналогично векторы $\overset{+}{\psi}_\sigma(x)\Phi_0$ являются линейными комбинациями векторов $\overset{+}{a}_\sigma(\boldsymbol{p})\,\Phi_0$ и тем самым изображают состояния с одной частицей.

Представление об операторах рождения и уничтожения, из которого мы исходили в начале этого параграфа, поддерживается полученными результатами. В самом деле, поскольку оператор $\overset{+}{\mathfrak{z}}_\sigma(p)$, согласно (11.32), увеличивает 4-импульс на p, а вектор вакуума имеет нулевой импульс, то

$$P\overset{+}{\beta}_\sigma(p)\,\Phi_0 = p\overset{+}{\beta}_\sigma\Phi_0.$$

Поскольку векторы $\overset{+}{b}_\sigma(p)\,\Phi_0$ линейно связаны с $\overset{+}{\beta}_\sigma(p)\,\Phi_0$, они также изображают состояния с определенным значением 4-импульса, равным p. Аналогично рассматривается действие операторов $\overset{+}{b}_\sigma(p)$ на любой вектор состояния с определенным значением импульса.

Что касается σ, то это другая характеристика векторов, производимых из вакуума операторами $\overset{+}{b}_\sigma(p)$; как мы увидим в дальнейшем, она связана со спином. Точно так же операторы $\overset{+}{a}_\sigma(p)$ производят частицы с импульсом p, а операторы $a_\sigma(p)$, $b_\sigma(p)$ уничтожают частицы с импульсом p.

§ 13. Теорема Паули о связи спина со статистикой

Причинность. В определении операторов рождения и уничтожения были оставлены две возможности для перестановочных соотношений — коммутирование и антикоммутирование. Можно привести некоторые доводы в пользу того, что эти виды перестановочных соотношений являются единственно приемлемыми с точки зрения физического смысла полей. Рассмотрим перестановочные соотношения для полей в x-представлении. Тогда действие полевого оператора $\psi_\sigma(x)$ (или $\overset{+}{\psi}_\tau(y)$) на вектор состояния можно связать с событием, локализованным в точке пространства-времени x (или y). Если вектор $x-y$ пространственноподобен, то события, происходящие в точках x, y, не могут быть причинно связаны. Поэтому естественно предположить, что их порядок безразличен, т. е. что для любого вектора состояния Φ векторы

$$\psi_\sigma(x)\,\overset{+}{\psi}_\tau(y)\,\Phi, \quad \overset{+}{\psi}_\tau(y)\,\psi_\sigma(x)\,\Phi \tag{13.1}$$

изображают одно и то же состояние квантовой системы. Но тогда они различаются лишь комплексным множителем $z\neq 0$:

$$\psi_\sigma(x)\,\overset{+}{\psi}_\tau(y)\,\Phi = z\overset{+}{\psi}_\tau(y)\,\psi_\sigma(x)\,\Phi. \tag{13.2}$$

Ясно, что число z здесь не зависит от Φ. В самом деле, если бы для различных Φ_1, Φ_2 соответствующие числа z_1, z_2 были не равны, то для $\Phi_1+\Phi_2$ соотношение вида (13.2) вообще было бы несправедливо ввиду линейности полевых операторов.

Отсюда получаем равенство операторов

$$\psi_\sigma(x)\overset{+}{\psi}_\tau(y)=z\overset{+}{\psi}_\tau(y)\psi_\sigma(x). \tag{13.3}$$

При неизменных x, y можно выполнить преобразования Лоренца, вызывающие нетривиальные преобразования компонент полей (вращения вокруг оси, проходящей через x и y). Если z не должно зависеть от выбора наблюдателя, то следует предположить, что оно не зависит от σ, τ. Но возможны еще преобразования Лоренца, меняющие местами x, y, поэтому естественно предположить, что z не меняется при перемене местами x и y. Теперь переменим местами в (13.3) x и y одновременно с σ и τ, а затем перейдем к сопряженным операторам. Это дает

$$\psi_\sigma(x)\overset{+}{\psi}_\tau(y)=\bar{z}\overset{+}{\psi}_\tau(y)\psi_\sigma(x),$$

и сравнение с (13.3) свидетельствует, что z — действительное число. Если еще потребовать полной симметрии между частицами и античастицами, т. е. между $\psi_\sigma(x)$ и $\overset{+}{\psi}_\sigma(x)$, то для операторов, взятых в обратном порядке, должно быть $\overset{+}{\psi}_\tau(y)\psi_\sigma(x)=z\psi_\sigma(x)\overset{+}{\psi}_\tau(y)$ с тем же z. Сопоставляя это с (13.3), имеем $z^2=1$, $z=\pm 1$, что приводит к двум возможностям:

$$[\psi_\sigma(x),\ \overset{+}{\psi}_\tau(y)]_+=0 \text{ при } (x-y)^2<0, \tag{13.4}$$

$$[\psi_\sigma(x),\ \overset{+}{\psi}_\tau(y)]_-=0 \text{ при } (x-y)^2<0. \tag{13.5}$$

Тем самым выделяются два вида перестановочных соотношений $[\ ]_+$ и $[\ ]_-$.

В квантовой теории поля предполагается, что для каждого вида квантованного поля операторы рождения и уничтожения удовлетворяют либо перестановочным соотношениям (12.1) с коммутаторами, и тогда кванты поля называются *бозонами*, либо таким же соотношениям с антикоммутаторами, и тогда кванты поля называются *фермионами*.

Соотношения (13.4), (13.5) приводят к следующему *принципу причинности*:

Если $(x-y)^2<0$, то
$$[\psi_\sigma(x),\ \overset{+}{\psi}_\tau(y)]_\pm=0, \tag{13.6}$$
где для бозонов следует взять знак —, а для фермионов — знак $+$.

Заметим еще, что другие коммутаторы, которые не будут дальше встречаться, считаются всегда равными нулю:
$$[\psi_\sigma(x),\psi_\tau(y)]_\pm=0,\quad [\overset{+}{\psi}_\sigma(x),\ \overset{+}{\psi}_\tau(y)]_\pm=0. \tag{13.7}$$

Теорема Паули. Вычислим теперь коммутатор
$$[\psi_\sigma(x),\ \overset{+}{\psi}_\tau(y)]_\pm,$$
пользуясь вытекающими из теоремы Вайнберга формулами (12.35), (12.36):
$$[\psi_\sigma(x),\ \overset{+}{\psi}_\tau(y)]_\pm=$$
$$=(2\pi)^{-3}\int\frac{dp'}{\sqrt{2\omega(p')}}\int\frac{dp}{\sqrt{2\omega(p)}}\sum_{\varkappa,\lambda}B_{\sigma\varkappa}(p')\bar{B}_{\tau\lambda}(p)\times$$
$$\times\{[a_\varkappa(p'),\ \overset{+}{a}_\lambda(p)]_\pm e^{-i(p'x-py)}+$$
$$+(-1)^{2j+\varkappa+\lambda}[\overset{+}{b}_{-\varkappa}(p'),\ b_{-\lambda}(p)]_\pm e^{i(p'x-py)}\}.$$
Но
$$[a_\varkappa(p'),\ \overset{+}{a}_\lambda(p)]_\pm=\delta_{\varkappa\lambda}\delta(p'-p),$$
$$[\overset{+}{b}_{-\varkappa}(p'),\ b_{-\lambda}(p)]_\pm=\pm[b_{-\lambda}(p),\ \overset{+}{b}_{-\varkappa}(p')]_\pm=\pm\delta_{\varkappa\lambda}\delta(p'-p),$$
и, следовательно, ввиду четности $2j+2\varkappa$,
$$[\psi_\sigma(x),\ \overset{+}{\psi}_\tau(y)]_\pm=$$
$$=(2\pi)^{-3}\int\sum_\varkappa B_{\sigma\varkappa}(p)\bar{B}_{\tau\varkappa}(p)\{e^{-ip(x-y)}\pm e^{ip(x-y)}\}\frac{dp}{2\omega(p)}.$$

Принимая во внимание, что по формуле (9.50)
$$\sum_\varkappa B_{\sigma\varkappa}(p)\bar{B}_{\tau\varkappa}(p)=$$
$$=\sum_\varkappa B_{\sigma\varkappa}(p)\overset{+}{B}_{\varkappa\tau}(p)=m^{-2j}\,\Pi_{\sigma\tau}(p), \tag{13.8}$$

переписываем (13.7), восстанавливая четырехмерную запись:

$$[\psi_\sigma(x),\ \psi_\tau(y)]_\pm = \\ = m^{-2j}(2\pi)^{-3}\int \Pi_{\sigma\tau}(p)\{e^{-ip(x-y)} \pm e^{ip(x-y)}\}\times \\ \times\delta(p^2-m^2)\,\vartheta(p^0)\,dp. \quad (13.9)$$

Поскольку матричные элементы $\Pi_{\sigma\tau}(p)$ суть однородные функции степени $2j$ от компонент 4-импульса p, то имеем

$$[\psi_\sigma(x),\ \overset{+}{\psi}_\tau(y)]_\pm = (-1)^{2j} m^{-2j}(2\pi)^{-3}\,\Pi_{\sigma\tau}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\int\{e^{-ip(x-y)} \pm \\ \pm(-1)^{2j}e^{ip(x-y)}\}\,\delta(p^2-m^2)\,\vartheta(p^2)\,dp. \quad (13.10)$$

Покажем, что если

$$(-1)^{2j} = \mp 1, \quad (13.11)$$

где верхний знак берется для антикоммутаторов, а нижний для коммутаторов, то требования (13.6) удовлетворены, а в противном случае они нарушаются. Если соблюдается равенство (13.11), то (13.10) может быть записано в виде

$$[\psi_\sigma(x),\ \overset{+}{\psi}_\tau(y)]_\pm = (-m)^{2j}(2\pi^{-3})\,\Pi_{\sigma\tau}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta(x-y), \quad (13.12)$$

где лоренц-инвариантная обобщенная функция $\Delta(x-y)$ определяется формулой

$$\Delta(x-y) = \int\{e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}\}\,\delta(p^2-m^2)\,\vartheta(p^0)\,dp = \\ = \int e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-i\omega(\boldsymbol{p})(x^0-y^0)}\frac{d\boldsymbol{p}}{2\omega(\boldsymbol{p})} - \\ - \int e^{-i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+i\omega(\boldsymbol{p})(x^0-y^0)}\frac{d\boldsymbol{p}}{2\omega(\boldsymbol{p})}. \quad (13.13)$$

Заменяя во втором интеграле переменные интегрирования $\boldsymbol{p}$ на $-\boldsymbol{p}$, получаем

$$\Delta(x-y) = -2i\int e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\sin\{\omega(\boldsymbol{p})(x^0-y^0)\}\frac{d\boldsymbol{p}}{2\omega(\boldsymbol{p})}. \quad (13.14)$$

Мы видим, что $\Delta(x-y)=0$ при $x^0=y^0$, т. е. при равных временах. Но так как $\Delta(x-y)$, согласно (13.13), есть лоренц-инвариантная функция, т. е. $\Delta(\Lambda x-\Lambda y)=\Delta(x-y)$, то мы можем надлежащим преобразованием Лоренца найти для любого пространственноподобного вектора $x-y$ такую систему координат $x'=\Lambda x$, для которой $(\Lambda x)^0=(\Lambda y)^0$. Тем самым для любой пары точек x, y, разделенных пространственноподобным интервалом, $\Delta(x-y)=0$, и требование принципа причинности выполняется.

Если вместо (13.11) принять, что

$$(-1)^{2j}=\pm 1, \tag{13.15}$$

где верхний знак берется для антикоммутаторов, а нижний для коммутаторов, то вместо (13.14) получаем

$$\Delta_1(x-y)=2\int e^{i\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\cos\{\omega(\boldsymbol{p})(x^0-y^0)\}\frac{d\boldsymbol{p}}{2\omega(\boldsymbol{p})}, \tag{13.16}$$

т. е. функцию, которая не исчезает при $(x-y)^2<0$. Итак, доказана теорема Паули:

Закон причинности удовлетворяется при целом j для коммутаторов и при полуцелом j для антикоммутаторов. Другими словами, для бозе-полей j является целым числом, и полуцелым для ферми-полей.

§ 14. Представления Вигнера для массивных полей

Формула преобразования состояний. До сих пор пространство состояний $\mathfrak{H}$ не было определено. Предполагалось лишь, что это — гильбертово пространство, на котором действуют квантованные поля и операторы, представляющие группу Пуанкаре и ее алгебру Ли. Выведенные в § 12 формулы преобразования операторов рождения и уничтожения открывают, как мы сейчас увидим, путь к реализации пространства $\mathfrak{H}$ и представления $U[a, u]$.

Мы будем исходить из того, что операторы рождения частиц $\overset{+}{a}_\sigma(\boldsymbol{p})$ и античастиц $\overset{+}{b}_\sigma(\boldsymbol{p})$, примененные к вектору вакуума, производят одночастичные состояния. В самом деле, $\overset{+}{a}_\sigma(\boldsymbol{p})\,\Phi_0$ есть состояние с импульсом $\boldsymbol{p}$

и еще некоторой характеристикой σ $(-j \leqslant \sigma \leqslant j)$, имеющей, как мы увидим, смысл проекции спина. Аналогично описывается $\overset{+}{b}_\sigma(\boldsymbol{p})$. Положим

$$\sqrt{\omega(\boldsymbol{p})}\,\overset{+}{a}_\sigma(\boldsymbol{p})\,\Phi_0 = |\,\boldsymbol{p}, \sigma\rangle, \tag{14.1}$$

где нормирующий множитель выбран для удобства следующих выкладок. Согласно теореме Вайнберга (12.33) векторы состояния $|\boldsymbol{p}, \sigma\rangle$ преобразуются по представлению (точнее, «антипредставлению») группы Пуанкаре:

$$U[a, u]\,|\,\boldsymbol{p}, \sigma\rangle = e^{i(\Lambda p, a)} \sum_\tau \bar{R}^{(j)^{-1}}_{\sigma\tau}\,|\,\overrightarrow{\Lambda p}, \tau\rangle, \tag{14.2}$$

где $\Lambda = h(u)$, а

$$R^{(j)} = R^{(j)}[u, p] = B^{-1}(\Lambda p)\,D^{(j)}[u]\,B(p) = \\ = D^{(j)}[b^{-1}(\Lambda p)\,ub(p)]. \tag{14.3}$$

Поскольку

$$r[u, p] = b^{-1}(\Lambda p)\,ub(p) \tag{14.4}$$

есть матрица вращения, то представляющая ее матрица $R^{(j)}$ унитарна; тем самым

$$\bar{R}^{(j)^{-1}}_{\sigma\tau} = R^{(j)}_{\tau\sigma}. \tag{14.5}$$

Предположим теперь, что произвольное одночастичное состояние Φ является суперпозицией состояний $|\,\boldsymbol{p}, \sigma\rangle$:

$$\Phi = \sum_\sigma \int \Phi_\sigma(p)\,|\,p, \sigma\rangle\,dp. \tag{14.6}$$

Конечно, здесь p пробегает значения только на гиперболоиде $p^2 - m^2 = 0$. Но вычисления упрощаются, если в (14.6) распространить интегрирование на все p-пространство, считая тем самым $\Phi_\sigma(p)$ обобщенными функциями. Тогда в силу (14.2), (14.5) имеем

$$U[a, u]\,\Phi = U[a, u] \sum_\sigma \int \Phi_\sigma(p)\,|\,p, \sigma\rangle\,dp = \\ = \sum_\sigma \int \Phi_\sigma(p)\,U[a, u]\,|\,p, \sigma\rangle\,dp = \\ = \int e^{i(\Lambda p, a)} \sum_{\sigma, \tau} \Phi_\sigma(p)\,R^{(j)}_{\tau\sigma}[u, p]\,|\,\Lambda p, \tau\rangle\,dp.$$

Выполним замену переменных $p = \Lambda^{-1} q$:

$$U[a, u]\Phi =$$
$$= \sum_{\tau} \int e^{i(qa)} \sum_{\sigma} R^{(j)}_{\tau\sigma}[u, \Lambda^{-1}q]\, \Phi_{\tau}(\Lambda^{-1}q)\, |\, q, \tau\rangle\, dq. \quad (14.7)$$

С другой стороны, для

$$\Phi' = U[a, u]\Phi \quad (14.8)$$

имеем разложение, аналогичное (14.6):

$$\Phi' = \sum_{\tau} \int \Phi'_{\tau}(q)\, |\, q, \tau\rangle\, dq. \quad (14.9)$$

Сравнивая (14.9) с (14.7), получаем *закон преобразования вектор-функций* $\Phi_{\sigma}(p)$:

$$\Phi'_{\sigma}(p) = e^{i(pa)} \sum_{\tau=-j}^{j} W^{(j)}_{\sigma\tau}[u, p]\, \Phi_{\tau}(\Lambda^{-1}p), \quad (14.10)$$

где, согласно (14.3),

$$W^{(j)}[u, p] = B^{-1}(p)\, D^{(j)}[u]\, B(\Lambda^{-1}p). \quad (14.11)$$

Это и есть основная формула Вигнера, ведущая к построению пространства состояний $\mathfrak{H}$. Проверим прежде всего, что формула (14.10) задает *представление группы Пуанкаре* на пространстве вектор-функций. В самом деле, выполним последовательно преобразования (u_2, b), (u_1, a):

$$\Phi'_{\rho}(p) = e^{i(pb)} \sum_{\tau} W^{(j)}_{\rho\tau}[u_2, p]\, \Phi_{\tau}(\mathrm{M}^{-1}p), \quad \mathrm{M} = h(u_2),$$

$$\Phi''_{\sigma}(p) = e^{i(pa)} \sum_{\rho} W^{(j)}_{\sigma\rho}[u_1, p]\, \Phi_{\rho}(\Lambda^{-1}p), \quad \Lambda = h(u_1),$$

откуда

$$\Phi''_{\sigma}(p) =$$
$$= e^{i(pa)} e^{i(\Lambda^{-1}p,\, b)} \sum_{\rho} W^{(j)}_{\sigma\rho}[u_1, p]\, W^{(j)}_{\rho\tau}[u_2, \Lambda^{-1}p]\, \Phi_{\tau}((\Lambda\mathrm{M})^{-1} p).$$

Далее

$$e^{i(\Lambda^{-1}p,\, b)} = e^{i(p,\, \Lambda b)},$$

и в силу (14.11)

$$W^{(j)}[u_1, p]\,W^{(j)}[u_2, \Lambda^{-1}p] =$$
$$= B^{-1}(p)\,D^{(j)}[u_1]\,B(\Lambda^{-1}p)\,B^{-1}(\Lambda^{-1}p)\,D^{(j)}[u_2]\,B(M^{-1}\Lambda^{-1}p) =$$
$$= B^{-1}(p)\,D^{(j)}[u_1u_2]\,B((\Lambda M)^{-1}p) = W^{(j)}[u_1u_2, p],$$

откуда

$$\Phi''_\sigma(p) = e^{i(p,\,\Lambda b+a)} \sum_\tau W^{(j)}_{\sigma\tau}[u_1u_2, p]\,\Phi_\tau((\Lambda M)^{-1}p).$$

Но это и значит, что (14.10) задает представление группы Пуанкаре. Можно положить, таким образом,

$$U[a, u]\,\Phi(p) = \Phi'(p), \tag{14.12}$$

где $\Phi'(p)$ задается с помощью (14.10).

Заметим, что эта формула представляет реализацию преобразования векторов состояния (14.8) в пространстве вектор-функций $\Phi_\sigma(p)$. Закон преобразования Вигнера для векторов состояний (14.10), (14.11) может быть получен чисто математически при разыскании унитарных представлений группы Пуанкаре. Таков был подход самого Вигнера в его классической работе [7], и Вайнберг в работе [5] исходит непосредственно из этого результата. Нам казалось более естественным, по крайней мере для предполагаемого читателя-физика, прийти к этому закону от более привычных понятий теории поля.

Унитарность представлений. Представление (14.10) бесконечномерно. Группа Пуанкаре, как и все некомпактные группы[1]), не имеет *конечномерных* унитарных представлений. Представления в пространстве вектор-функций, рассмотренные в § 2, бесконечномерны, но не унитарны. Напротив, правило (14.10), как мы сейчас убедимся, задает *унитарное* представление.

---

[1]) Группа G называется *компактной*, если из каждой последовательности ее элементов можно выделить сходящуюся подпоследовательность. В случае группы Пуанкаре это требование, очевидно, не соблюдается.

Определим в пространстве функций $\Phi(p^0, p^1, p^2, p^3)$ скалярное произведение

$$\langle\Phi|X\rangle = \int \sum_{\sigma} \bar{\Phi}_\sigma(p) X_\sigma(p)\, dp. \tag{14.13}$$

Тогда это пространство становится гильбертовым. Покажем, что преобразования (14.10) сохраняют скалярные произведения.

В самом деле,

$$\langle\Phi'|X'\rangle =$$
$$= \int \sum_{\sigma,\tau,\rho} \bar{W}^{(j)}_{\sigma\tau}[u, p]\, W^{(j)}_{\sigma\rho}[u, p]\, \bar{\Phi}_\tau(\Lambda^{-1}p)\, X_\rho(\Lambda^{-1}p)\, dp,$$

а это, в силу унитарности матриц $W^{(j)}$, сводится к

$$\int \sum_{\tau,\rho} \delta_{\tau\rho} \bar{\Phi}_\tau(\Lambda^{-1}p)\, X_\rho(\Lambda^{-1}p)\, dp =$$
$$= \int \sum_{\tau} \bar{\Phi}_\tau(\Lambda^{-1}p)\, X_\tau(\Lambda^{-1}p)\, dp =$$
$$= \int \sum_{\tau} \bar{\Phi}_\tau(q)\, X_\tau(q)\, dq = \langle\Phi|X\rangle.$$

Выделение неприводимых представлений. Ясно, что представление (14.10) *приводимо*; в самом деле, рассмотрим вектор-функции $\Phi(p)$, отличные от нуля лишь на гиперболоиде $p^2-m^2=0$. Тогда (14.10) переводит $\Phi(p)$ в вектор-функцию того же рода, и при любом m получается инвариантное подпространство $\mathfrak{H}^{(j)}_m$ представления (14.10). Вспомним, что выше мы как раз и пришли к этому представлению, а затем уже расширили смысл суммирования на все p. На инвариантном подпространстве $\mathfrak{H}^{(j)}_m$ скалярное произведение можно записать в виде тройного интеграла (ср. (14.6), (14.13)):

$$\langle\Phi|X\rangle = \sum_{\sigma=-j}^{j} \int \bar{\Phi}_\sigma(\mathbf{p})\, X_\sigma(\mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{2\omega(\mathbf{p})}, \tag{14.14}$$

где интегрирование производится по правой поле гиперболоида $p^2-m^2=0$, $p^0>0$. Как показал Вигнер [7], *представление* (14.10), *рассматриваемое на* *подпространстве* $\mathfrak{H}_m^{(j)}$, *неприводимо при любом* $m > 0$ *и любом целом или полуцелом* j. Обозначим такое представление через $[m, j]_+$. *Все эти представления не эквивалентны друг другу.* Аналогичные представления $[m, j]_-$ получаются в пространствах, определенных на *левой* поле гиперболоида. Далее можно рассматривать вместо гиперболоидов $p^2 - m^2 = 0$ конус $p^2 = 0$, что приводит к другим неприводимым представлениям, соответствующим частицам нулевой массы (см. § 18). Что касается однополых гиперболоидов $p^2 = c < 0$, то им тоже соответствуют неприводимые представления группы Пуанкаре, но не имеющие физического смысла: на таком подпространстве оператор квадрата массы принимает отрицательное значение c, между тем как масса частицы, по существующим представлениям, должна быть неотрицательной. Ниже, в § 17, мы вернемся к неприводимым представлениям группы Пуанкаре.

Полный анализ унитарных представлений группы Пуанкаре содержится в работах [7, 1, 11, 2] (см. также обзор [15]).

Определение понятия элементарной частицы. Вигнеру принадлежит следующее, общепринятое в настоящее время, определение понятия элементарной частицы, исходящее из группы симметрии Пуанкаре. Мы уже пользовались этим определением в § 10:

> Квантовая система, описываемая неприводимым унитарным представлением группы Пуанкаре $\mathscr{P}_+^\uparrow$, называется элементарной частицей.

Теперь мы знаем (пока для случая положительной массы) перечень неприводимых унитарных представлений группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Оператор $M^2 = P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2$, для которого пространство $\mathfrak{H}_m^{(j)}$ неприводимого представления является собственным подпространством, имеет на нем неотрицательное собственное значение m^2. Частицы с $m > 0$ мы будем также называть *массивными*, а частицы с $m = 0$ — *безмассовыми*.

Для частиц, квантованные поля которых допускают пространственные отражения, предыдущее определение должно быть видоизменено: вместо представлений специальной группы Пуанкаре $\mathscr{P}_+^\uparrow$ их надо задавать представлениями *полной* группы $\mathscr{P}$.

Конечно, предложенная Вигнером классификация элементарных частиц не касается так называемых «внутренних» симметрий частицы, не связанных непосредственно с перемещениями в пространстве-времени и не охватываемых группой Пуанкаре. Примером таких симметрий является унитарная симметрия адронов, связанная с группами $SU(3)$ и $SU(6)$.

§ 15. Спин и спиральность

В этом параграфе рассматриваются только частицы положительной массы, описываемые, как было указано выше, представлениями $[m, j]_+$ группы Пуанкаре $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Теперь мы находимся в ином положении, чем в начале нашего изложения, когда пространство векторов состояния $\mathfrak{H}$ было просто постулировано, но не построено. Займемся поэтому заново наблюдаемыми группы Пуанкаре и посмотрим, как они действуют в одночастичном пространстве $\mathfrak{H}_m^{(j)}$, где задано представление $[m, j]_+$.

Импульс и энергия. Рассмотрим сначала вектор-оператор 4-импульса, соответствующий четырем однопараметрическим подгруппам сдвигов. Для сдвига вдоль оси e_α пространства Минковского ($\alpha=0$, 1, 2, 3) имеем подгруппу

$$g_\alpha(\vartheta) = (\vartheta e_\alpha, 1), \tag{15.1}$$

порождающую в представлении $[m, j]_+$ однопараметрическую подгруппу операторов

$$U[\vartheta e_\alpha, 1]\,\Phi_\sigma(p) = e^{i\vartheta p_\alpha}\Phi_\sigma(p) \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3). \tag{15.2}$$

Эта подгруппа порождается эрмитовым оператором умножения на p_α:

$$P_\alpha\Phi_\sigma(p) = p_\alpha\Phi_\sigma(p). \tag{15.3}$$

Таким образом, понятие импульса частицы может быть определено, исходя из группы Пуанкаре. Как обычно, оператор 4-импульса имеет непрерывный спектр. В гильбертовом пространстве представления $\mathfrak{H}_m^{(j)}$ не существует собственных векторов оператора P_α. Тем самым векторы состояния Φ с определенным значением 4-импульса могут быть получены лишь с выходом за пределы гильбертова пространства $\mathfrak{H}_m^{(j)}$, где задано представление. Фиксируем значение 4-импульса $\tilde{p}$ и целое или полуцелое число σ из последовательности $-j, -j+1, \ldots, j-1, j$. Тогда обобщенная вектор-функция

$$\Phi_\tau(p) = \delta_{\sigma\tau}\delta(p-\tilde{p}) \tag{15.4}$$

изображает состояние с определенным значением 4-импульса, равным $\tilde{p}$; в самом деле, в силу (15.3)

$$P_\alpha\Phi = \mathrm{X}, \text{ где } \mathrm{X}_\tau(p) = p_\alpha\delta_{\sigma\tau}\delta(p-\tilde{p}) = \tilde{p}_\alpha\delta_{\sigma\tau}\delta(p-\tilde{p}).$$

С помощью закона преобразования (14.10) нетрудно убедиться, что вектор $U[a, u]\Phi$ является линейной комбинацией аналогичных векторов с заменой $\tilde{p}$ на $\Lambda\tilde{p}$, $\Lambda = h(u)$. Наконец, для *любой* вектор-функции $\Phi_\tau(p)$ получаем разложение по функциям вида (15.4)

$$\Phi_\tau(p) = \sum_\sigma \int \Phi_\sigma(\tilde{p})\,\delta_{\sigma\tau}\delta(p-\tilde{p})\,d\tilde{p}. \tag{15.5}$$

Сравнивая это с (14.6), мы можем отождествить вектор-функцию (15.4) с «неявно» заданным в § 14 вектором состояния $|\tilde{p}, \sigma\rangle$. Переходя к функциям, определенным на гиперболоиде, т. е. к гильбертову пространству со скалярным произведением (14.14), мы можем записать (15.4) как обобщенную функцию *трех* переменных $\boldsymbol{p}$:

$$|\tilde{\boldsymbol{p}}, \sigma\rangle = 2\omega(\tilde{\boldsymbol{p}})\,\delta_{\sigma\tau}\delta(\boldsymbol{p}-\tilde{\boldsymbol{p}}); \tag{15.6}$$

тогда вместо (15.5) получаем разложение

$$\Phi = \sum_\sigma \int \Phi(\tilde{\boldsymbol{p}})\,|\tilde{\boldsymbol{p}}, \sigma\rangle \frac{d\tilde{\boldsymbol{p}}}{2\omega(\tilde{\boldsymbol{p}})} \tag{15.7}$$

с интегрированием по инвариантной мере. Итак, мы выяснили вид собственных векторов 4-импульса. Легко найти также возможные для представления $\mathfrak{H}_m^{(j)}$ собственные значения P_α.

Очевидно, (15.4) задает ненулевую функцию на гиперболоиде $p^2 - m^2 = 0$, $p^2 > 0$ лишь при условии, что точка $\tilde{p}$ сама принадлежит этому же гиперболоиду, т. е. что

$$(\tilde{p}^0)^2 - \tilde{\boldsymbol{p}}^2 = m^2, \quad \tilde{p}^0 > 0. \tag{15.8}$$

Отсюда ясно, что спектр оператора P_α определяется следующими неравенствами:

$$p^0 \geqslant m, \quad -\infty < p^k < \infty \quad (k = 1, 2, 3). \tag{15.9}$$

Момент. Рассмотрим теперь однопараметрическую подгруппу вращений вокруг произвольной оси. Принимая эту ось за ось z, имеем (см. (5.16)) накрывающую однопараметрическую подгруппу в $SL(2)$

$$r(\vartheta) = \cos\frac{\vartheta}{2} + i\sigma_3 \sin\frac{\vartheta}{2} = e^{\frac{i\vartheta}{2}\sigma_3}. \tag{15.10}$$

Соответствующая однопараметрическая подгруппа операторов в $\mathfrak{H}_m^{(j)}$ имеет вид (см. (14.10))

$$(U[0, r(\vartheta)]\Phi)_\sigma(p) = \sum_{\tau=-j}^{j} W_{\sigma\tau}[r(\vartheta), p]\,\Phi_\tau(R(\vartheta)^{-1}p). \tag{15.11}$$

Запишем вращение $R(\varphi)$ вокруг оси z, соответствующее $r(\vartheta)$:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\vartheta + y\sin\vartheta, \\ y' &= -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{15.12}$$

Из (5.16), (5.17) или непосредственно из определения буста нетрудно вывести, что для унитарной матрицы r и накрываемого ею вращения R

$$b(Rp)\,r = rb(p);$$

поэтому из (14.11) имеем

$$W^{(j)}[r(\vartheta), p] = D^{(j)}[r(\vartheta)]. \tag{15.13}$$

Тем самым матрица $W^{(j)}$ сводится к унитарной матрице $D^{(j)}[r(\vartheta)]$, не зависящей от p:

$$(U[0, r(\vartheta)]\Phi)_\sigma(p) = \sum_{\tau=-j}^{j} D_{\sigma\tau}^{(j)}[r(\vartheta)]\,\Phi_\tau(R(\vartheta)^{-1}p). \tag{15.14}$$

Итак, мы нашли однопараметрическую подгруппу операторов, представляющую вращения вокруг оси z. Чтобы получить порождающий ее оператор, представляющий элемент алгебры Ли $\frac{1}{2}\sigma_3$, продифференцируем (15.14) по ϑ, а затем положим $\vartheta=0$. Обозначим полученный оператор через iM_3, вводя, таким образом, *эрмитов* оператор M_3:

$$(iM_3\Phi)_\sigma(p)=\sum_{\tau=-j}^{j}\left(\frac{d}{d\vartheta}D_{\sigma\tau}^{(j)}[r(\vartheta)]\right)_{\vartheta=0}\Phi_\tau(p)+ \\ +\left(\frac{d}{d\vartheta}\Phi_\sigma(R(\vartheta)^{-1}p)\right)_{\vartheta=0}. \quad (15.15)$$

Производная в первом слагаемом вычисляется точно так же, как при вычислении аналогичного оператора для представления $D^{(j,\,0)}$ группы $SU(2)$. Поскольку это представление *унитарно*, после деления на i получаем эрмитову матрицу $I_3^{(j)}$ порядка $2j+1$ (ср. (9.42))

$$\left(\frac{d}{d\vartheta}D^{(j)}[r(\vartheta)]\right)_{\vartheta=0}=iI_3^{(j)}. \quad (15.16)$$

Перейдем теперь ко второму слагаемому (15.15); в силу (15.12)

$$\left(\frac{d}{d\vartheta}\Phi_\sigma(p_0,\ p_1\cos\vartheta-p_2\sin\vartheta,\ \ p_1\sin\vartheta+p_2\cos\vartheta,\ p_3)\right)_{\vartheta=0}= \\ =-\left(p_1\frac{\partial}{\partial p^2}-p_2\frac{\partial}{\partial p^1}\right)\Phi_\sigma(p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3). \quad (15.17)$$

Следовательно,

$$(M_3\Phi)_\sigma(p)= \\ =\sum_{\tau=-j}^{j}(I_3^{(j)})_{\sigma\tau}\Phi_\tau(p)-\frac{1}{i}\left(p_1\frac{\partial}{\partial p^2}-p_2\frac{\partial}{\partial p^1}\right)\Phi_\sigma(p). \quad (15.18)$$

Оператор M_3 называется *проекцией момента*. Это эрмитов оператор в пространстве $\mathfrak{H}_m^{(j)}$, представленный в виде суммы двух слагаемых. Второе из них есть не что иное, как известный из обычной квантовой механики оператор O_3 проекции орбитального момента. Этот оператор действует одинаковым образом на все компоненты волновой функции $\Phi_\sigma(p)$. Напротив, первое слагаемое S_3 есть оператор, действующий на компоненты, но не меняющий аргумента p. Назовем его *оператором проекции спина* или *оператором поляризации*.

Итак,

$$M_3 = O_3 + S_3. \tag{15.19}$$

Естественно, в предыдущих рассуждениях ось z можно заменить любой осью пространственных вращений. Но все операторы алгебры Ли, соответствующие вращениям, линейно выражаются через операторы вращения вокруг осей x, y, z. Поэтому базис операторов, представляющих алгебру Ли подгруппы $SU(2)$, составляют M_1, M_2, M_3, с обычными перестановочными соотношениями (8.13). Разумеется, разделение оператора момента на спиновое и орбитальное слагаемые зависит от выбранной системы отсчета (p_0, p_1, p_2, p_3) (точнее, от выделения в пространстве Минковского «пространственной» плоскости $\mathbb{R}^3$; от выбора осей зависят лишь *компоненты* O и S).

Спектр и собственные функции оператора орбитального момента детально изучаются в учебниках квантовой механики; p_0 в этом вопросе так же не играет роли, как время t в волновых функциях Шредингера.

Спектр оператора поляризации сразу же находится из формулы (9.42). В самом деле, I_3 — диагональная матрица:

$$I_3 = \begin{pmatrix} -j & & & & 0 \\ & -j+1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & j-1 & \\ 0 & & & & j \end{pmatrix}. \tag{15.20}$$

(Если бы мы взяли вращения вокруг оси x или y, то пришли бы к эквивалентным матрицам I_1, I_2, имеющим те же собственные значения; но в § 9 базис спинтензорного представления был выбран таким образом, что I_3 представляется проще.) Поэтому собственные векторы оператора поляризации S_3 имеют вид

$$\Phi^{(\tau)}(p) = (0, 0, \ldots \Phi_\tau(p), \ldots, 0) \tag{15.21}$$

с единственной ненулевой компонентой. Отсюда

$$S_3\Phi^{(\tau)}(p) = \tau\Phi^{(\tau)}(p). \qquad (15.22)$$

Следовательно, спектр оператора поляризации в представлении $[m, j]_+$ состоит из чисел

$$-j, \ -j+1, \ldots, j-1, \ j. \qquad (15.23)$$

Эти собственные значения бесконечно вырождены, т. е. каждому из них принадлежит бесконечномерное пространство собственных вектор-функций (см. (15.21)).

Определение спина. Теперь мы в состоянии определить понятие спина для элементарной частицы положительной массы.

Пусть элементарная частица задается некоторым неприводимым представлением группы Пуанкаре с положительным собственным значением оператора M^2. Тогда ее спином называется наибольшая абсолютная величина собственных значений оператора поляризации в этом представлении.

Для рассмотренных выше неприводимых представлений $[m, j]_+$ спин оказывается, таким образом, равным j. Заметим, что масса частицы определяется по задающему ее неприводимому представлению как корень из собственного значения оператора M^2, для которого все пространство представления $\mathfrak{H}_m^{(j)}$ является собственным пространством (такие операторы, постоянные на всем пространстве представления, называются операторами Казимира). Поскольку группа Пуанкаре имеет еще другой оператор Казимира w^2 (см. § 8), естественно ожидать, что спин связан с этим оператором. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим «вектор Паули—Любанского» (см. (8.28)), т. е. систему операторов

$$w_\rho = \frac{1}{2}\varepsilon_{\lambda\mu\nu\rho}P^\lambda M^{\mu\nu} \quad (\rho = 0, 1, 2, 3). \qquad (15.24)$$

Оператор Казимира w^2 выражается через эти операторы в виде

$$w^2 = -w_\rho w^\rho. \qquad (15.25)$$

Поскольку все векторы пространства неприводимого представления $\mathfrak{H}^{(j)}_m$ являются собственными векторами оператора Казимира, принадлежащими одному и тому же собственному значению, для вычисления этого собственного значения достаточно применить оператор w^2 к одному произвольно выбранному вектору пространства. Возьмем в качестве такого вектора $|m, \sigma\rangle$, т. е. один из векторов с определенным значением 4-импульса, равным $(m, 0, 0, 0)$. Как мы сейчас покажем, такой вектор является собственным одновременно для всех операторов w_ρ. В самом деле, при вычислении w_ρ по формуле (15.24) могут быть отличны от нуля лишь члены, в которых все числа λ, μ, ν, ρ попарно не равны друг другу. Но в этом случае, согласно перестановочным соотношениям (8.25), $M^{\mu\nu}$ можно переставить с P^λ, и в выражении $w_\rho \mid m, \sigma\rangle$ сохраняются лишь члены с $\lambda=0$:

$$w_\rho \,|\, m, \sigma\rangle = M^{\mu\nu} P^0 \,|\, m, \sigma\rangle = M^{\mu\nu} m \,|\, m, \sigma\rangle,$$

где (μ, ν, ρ) образуют положительную перестановку чисел (1, 2, 3). Переходя к одноиндексному обозначению для моментов (см. (8.12)) и учитывая, что при $\rho=0$ должно быть обязательно $\lambda\neq 0$, так что все члены в (15.24) обращаются в нуль, имеем

$$w_k \,|\, m, \sigma\rangle = m M_k \,|\, m, \sigma\rangle \quad (k=1, 2, 3),$$
$$w_0 \,|\, m, \sigma\rangle = 0.$$

С другой стороны, из Приложения I (I.1) видно, что функция $\delta(\boldsymbol{p})$ инвариантна относительно вращений p-пространства; согласно (15.6) это значит, что каждый из векторов $|m, \sigma\rangle$ переводится в нуль операторами орбитального момента O_k $(k=1, 2, 3)$. Учитывая еще (15.19) и аналогичные разложения для других координатных осей, имеем

$$w_k \,|\, m, \sigma\rangle = m S_k \,|\, m, \sigma\rangle, \quad w_0 \,|\, m, \sigma\rangle = 0.$$

Отсюда

$$w^2 \,|\, m, \sigma\rangle = m^2 S^2 \,|\, m, \sigma\rangle, \quad S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2.$$

Применяя к операторам спина S_k общую теорему кинематики моментов, имеем $S^2=j(j+1)$, где j — наибольшее собственное значение любого из операторов S_k, т. е. *спин* нашей частицы, совпадающий с числом j, при помощи которого мы определили представление группы Пуанкаре $[m, j]_+$.

Итак,

$$w^2|m, \sigma\rangle = m^2 j(j+1)|m, \sigma\rangle,$$

а поскольку w^2 — оператор Казимира, то для *всех* векторов пространства $\mathfrak{H}_m^{(j)}$ собственное значение w^2 (обозначаемое так же, как оператор) выражается формулой

$$w^2 = m^2 j(j+1). \tag{15.26}$$

Таким образом, *масса и спин частицы полностью задаются операторами Казимира группы Пуанкаре и ее неприводимым представлением* (*при* $m>0$).

Определение спиральности. Возьмем теперь произвольный вектор состояния с определенным значением импульса $|\boldsymbol{p}, \sigma\rangle$, задающий равномерное и прямолинейное движение частицы, и вычислим для этого состояния *проекцию момента* $\boldsymbol{M}$ *на направление движения*; иначе говоря, применим к вектору $|\boldsymbol{p}, \sigma\rangle$ *оператор спиральности* $\lambda(\boldsymbol{p})$, зависящий от вектора $\boldsymbol{p}$:

$$\lambda(\boldsymbol{p}) = \frac{(\boldsymbol{M}\boldsymbol{p})}{|\boldsymbol{p}|}. \tag{15.27}$$

Как легко проверить, для операторов орбитального момента O_k имеем $\sum O_k p_k = 0$, так что $(\boldsymbol{M}\boldsymbol{p})$ сводится к $(\boldsymbol{S}\boldsymbol{p})$. Выбирая направление $\boldsymbol{p}$ за ось z, мы можем отождествить $\lambda(\boldsymbol{p})$ с рассмотренным выше оператором S_3. Следовательно,

$$\lambda(\boldsymbol{p})|\boldsymbol{p}, \sigma\rangle = \sigma|\boldsymbol{p}, \sigma\rangle, \quad \sigma = -j, -j+1, \ldots, j-1, j. \tag{15.28}$$

Таким образом, собственные значения спиральности для частиц положительной массы не зависят от импульса $\boldsymbol{p}$ и совпадают с собственными значениями поляризации.

Как мы видим, понятие спиральности при $m > 0$ не приводит к новой характеристике частицы, но дает физическое истолкование ее поляризации. Для частиц нулевой массы дело обстоит иначе: для них понятие спиральности приобретает самостоятельный характер, в некотором смысле принимая на себя одну из функций спина, состоящую в задании неприводимого представления группы Пуанкаре. Возникающее в этом случае сложное положение вещей рассматривается в § 19.

§ 16. Общие поля для массивных частиц

Общие поля. Общее определение поля (§ 2) предполагает, что поля суть вектор-функции, заданные в пространстве Минковского и преобразующиеся по некоторому представлению группы Пуанкаре (2.11). В построении этого представления участвует конечномерное представление группы Лоренца $D[\Lambda]$, которое в силу накрытия можно считать также представлением $D[u]$ группы $SL(2)$; это представление, вообще говоря, приводимо. Разлагая $D[u]$ на неприводимые представления, можно свести данное поле к «неприводимым» полям, каждое из которых задается некоторым спин-тензорным представлением $D^{(j, j')}[u]$ группы $SL(2)$. В этом смысле все поля могут быть сведены к спин-тензорным.

Мы рассмотрели выше простейший случай, когда представление $D[u]$ имеет тип $(j, 0)$. Как показывают примеры встречающихся полей (§§ 7, 10), нет оснований ограничиваться этим случаем. Компоненты поля могут быть занумерованы любым числом индексов; их можно, однако, перенумеровать одним индексом, приведя поле к виду $\{\psi_\nu(x)\}$.

Итак, формулы преобразования полей (§ 10) можно считать вполне общими, если не требовать, чтобы число компонент совпадало с числом состояний поляризации поля. Как мы увидим, для электромагнитного и других безмассовых полей с ненулевым спином от этого требования действительно приходится отказаться.

Пока же, ограничиваясь массивными полями, мы рассмотрим наиболее общие поля $\varphi_\nu(x)$, не предполагая представление группы $D[u]$ неприводимым. Следуя Вайнбергу, мы покажем, что если представление D, в известном смысле, «содержит» заданное неприводимое представление группы вращений $R^{(j)}$, то можно выразить соответствующее поле через операторы рождения и уничтожения частиц со спином j. При этом матрицы X, Y в выражениях вида (12.6) оказываются, вообще говоря, *прямоугольными*.

Пусть V — пространство представления D группы $SL(2)$ размерности N. Предположим, что операторы представления D, соответствующие накрывающим вращений r, оставляют инвариантным некоторое $(2j+1)$-мерное подпространство V' пространства V; тем самым в V' задается некоторое представление группы $SU(2)$. Если это представление неприводимо, будем говорить, что *D содержит $R^{(j)}$*.

Итак, предположим, что D содержит $R^{(j)}$. Выберем базис в V' из $2j+1$ векторов $u(\sigma)$, где $\sigma=-j, -j+1, \ldots$ $\ldots, j-1, j$ — номер базисного вектора. По определению представления $R^{(j)}$, имеем следующий закон преобразования векторов $u(\sigma)$ (поскольку здесь записывается выражение σ-го преобразованного вектора через исходные, суммирование производится по *первому* индексу):

$$u'(\sigma)=\sum_{\tau=-j}^{j} R^{(j)}_{\tau\sigma}[r]\,u(\tau),$$

откуда для каждой компоненты

$$u'_n(\sigma)=\sum_{\tau=-j}^{j} R^{(j)}_{\tau\sigma}[r]\,u_n(\tau). \tag{16.1}$$

С другой стороны, для каждого вектора $u(\sigma)$ $(\sigma=-j, -j+1, \ldots, j-1, j)$ преобразованный вектор $u'(\sigma)$ имеет компоненты

$$u'_n(\sigma)=\sum_{m=1}^{N} D_{nm}[r]\,u_m(\sigma),$$

где суммирование производится по *второму* индексу, поскольку преобразование записывается в компонентах. Сопоставляя это с (16.1), находим

$$\sum_m D_{nm}[r]\, u_m(\sigma) = \sum_\tau u_n(\tau)\, R^{(j)}_{\tau\sigma}[r]. \qquad (16.2)$$

Полученная формула связывает N-мерное (вообще говоря, приводимое) представление D группы $SL(2)$ в пространстве V и сужение этого представления на подгруппу $SU(2)$, неприводимое на $(2j+1)$-мерном подпространстве V'.

Построение «волновых функций». После этой предварительной подготовки можно выразить N-компонентное поле через операторы рождения и уничтожения частиц со спином j. Для этой цели воспользуемся компонентами векторов $u(\sigma)$: *определим* поле $\alpha_n(\boldsymbol{p})$ равенством

$$\alpha_n(\boldsymbol{p}) = \sqrt{2\omega(p)} \sum_{\sigma,\, m} D_{nm}[b(\boldsymbol{p})]\, u_m(\sigma)\, a_\sigma(\boldsymbol{p}). \qquad (16.3)$$

Сравнивая это определение с (12.24), мы видим прежде всего, что матрица, с помощью которой поле выражается через операторы уничтожения, теперь не квадратная, а, вообще говоря, прямоугольная. Зависящие от $\boldsymbol{p}$ коэффициенты выражений (16.3) содержат, как и прежде, матрицы буста, но сверх того еще множители $u_m(\sigma)$, сокращающие число коэффициентов при операторах с N до $2j+1$.

Покажем, что введенное таким образом поле (16.3) преобразуется по закону (10.14), с представлением D вместо частного случая $D^{(j)}$, для которого был выписан в § 10 этот закон. По определению (10.9) преобразования квантованных полей и по закону преобразования (12.26) операторов уничтожения имеем

$$\begin{aligned}
\alpha'_n(\boldsymbol{p}) &= U[u]\,\alpha_n(\boldsymbol{p})\,U^{-1}[u] = \\
&= \sqrt{2\omega(\boldsymbol{p})} \sum_{\sigma,\, m} D_{nm}[b(\boldsymbol{p})]\, u_m(\sigma)\, U[u]\, a_\sigma(\boldsymbol{p})\, U^{-1}[u] = \\
&= \sqrt{2\omega(\boldsymbol{p})} \sum_{\sigma,\, m} D_{nm}[b(\boldsymbol{p})]\, u_m(\sigma) \sqrt{\frac{2\omega(\overrightarrow{\Lambda p})}{2\omega(\boldsymbol{p})}} \times \\
&\qquad \times \sum_\tau R^{(j)-1}_{\sigma\tau}[u,\ \boldsymbol{p}]\, a_\tau(\overrightarrow{\Lambda p}).
\end{aligned}$$

Здесь

$$R^{(j)}[u,\ \boldsymbol{p}] = R^j[r],$$

где

$$r = b^{-1}(\overrightarrow{\Lambda p})\, ub(\boldsymbol{p});$$

пользуясь (16.2), получаем (ср. (11.16))

$$\alpha'_n(\boldsymbol{p}) = \sqrt{2\omega(\overrightarrow{\Lambda p})} \sum_{m,k,\tau} D_{nm}[b(\boldsymbol{p})]\, D_{mk}[r^{-1}]\, u_k(\tau)\, a_\tau(\overrightarrow{\Lambda p}) =$$

$$= \sqrt{2\omega(\overrightarrow{\Lambda p})} \sum_{m,k,l,r,\tau} (D_{nm}[b(\boldsymbol{p})]\, D_{ml}[r^{-1}]\, D_{lr}[b^{-1}(\overrightarrow{\Lambda p})]) \times$$

$$\times D_{rk}[b(\overrightarrow{\Lambda p})]\, u_k(\tau)\, a_\tau(\overrightarrow{\Lambda p}) = \sum_r D_{nr}[u^{-1}]\, \alpha_r(\overrightarrow{\Lambda p}).$$

Это и есть требуемый закон преобразования полей под действием бинарных преобразований u; преобразование сдвига сводится к умножению на $e^{-i(\Lambda p,\ a)}$ всех операторов уничтожения, что также дает правильный закон преобразования полей (11.16). Итак,

$$\alpha'_n(\boldsymbol{p}) = e^{-i(\Lambda p,\, a)} \sum_m D_{nm}[u^{-1}]\, \alpha_m(\overrightarrow{\Lambda p}). \tag{16.4}$$

Зависящие от $\boldsymbol{p}$ коэффициенты в выражении (16.3) называются (вряд ли удачно) «волновыми функциями» поля; они равны

$$u_n(\boldsymbol{p},\ \sigma) = \sqrt{2\omega(\boldsymbol{p})} \sum_m D_{nm}[b(\boldsymbol{p})]\, u_m(\sigma). \tag{16.5}$$

Поле $\beta_n(\boldsymbol{p})$, соответствующее античастицам, строится совершенно аналогично при помощи других «волновых функций» $v_n(\boldsymbol{p})$; подпространство V', с помощью которого получаются эти функции, вообще говоря, не совпадает с предыдущим. Выражение $\beta_n(\boldsymbol{p})$ через $b_n(\boldsymbol{p})$ такое же, как в (16.3). Переходя к сопряженным операторам, получаем выражения $\overset{+}{\alpha}_n(\boldsymbol{p})$, $\overset{+}{\beta}_n(\boldsymbol{p})$; в частности (ср. (12.31)),

$$\overset{+}{\beta}_n(\boldsymbol{p}) = \sqrt{2\omega(\boldsymbol{p})} \sum_{\sigma,\tau,m} D_{nm}[b(\boldsymbol{p})]\, v_m(\tau)\, C_{\sigma\tau} \overset{+}{b}_\sigma(\boldsymbol{p}), \tag{16.6}$$

с «волновыми функциями»

$$v_n(\boldsymbol{p}, \sigma) = \sqrt{2\omega(\boldsymbol{p})} \sum_{m, \tau} D_{nm}[b(\boldsymbol{p})] C_{\sigma\tau} v_m(\tau).$$

С помощью (16.3) и (16.6) строится общее квантованное поле

$$\psi_n(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_\sigma \int \{u_n(\boldsymbol{p}, \sigma) e^{-i(px)} a_\sigma(\boldsymbol{p}) + $$
$$+ v_n(\boldsymbol{p}, \sigma) e^{i(px)} \overset{+}{b}_\sigma(\boldsymbol{p})\} \frac{d\boldsymbol{p}}{2\omega(\boldsymbol{p})} \qquad (16.7)$$

и аналогично сопряженное поле $\overset{+}{\psi}_n(x)$.

Ясно, что поле $\psi_n(x)$ удовлетворяет уравнению Клейна—Гордона. Что касается условий причинности (13.6), то можно удовлетворить им, если наложить на волновые функции условия

$$\sum_\sigma \bar{u}_n(\sigma) u_m(\sigma) = \sum_\sigma \bar{v}_n(\sigma) v_m(\sigma), \qquad (16.8)$$

а для операторов рождения и уничтожения постулировать перестановочные соотношения с коммутаторами или антикоммутаторами в зависимости от спина частиц j, как этого требует теорема Паули.

Квантованное поле Дирака. Рассмотрим в качестве примера *биспинорное* поле $\psi_\mu(x)$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$), преобразующееся по биспинорному представлению

$$\psi'_\mu(x) = U[a, u] \psi_\mu(x) U^{-1}[a, u] =$$
$$= \sum_\nu D_{\mu\nu}[u^{-1}] \psi_\nu(\Lambda x + a), \qquad (16.9)$$

где $\Lambda = h(u)$, а матрицы $D[u]$ задаются выражением (6.7). Пространство биспиноров, играющее в этом случае роль V, четырехмерно. Выделим в нем подпространства, инвариантные относительно преобразований $D[r]$, представляющих унитарные матрицы r. Для этого заметим, что матрица

$$i\gamma_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right)$$

перестановочна с матрицами

$$D[r] = \left(\begin{array}{c|c} r & 0 \\ \hline 0 & \bar{r} \end{array}\right)$$

(мы пользуемся здесь «разделенными» координатами § 6, в которых ψ_1, ψ_2 задают спинор, ψ_3, ψ_4 — коспинор). Собственные подпространства оператора $i\gamma_0$ принадлежат собственным значениям 1 (соответственно —1) и состоят из биспиноров вида

$$(\psi_1, \psi_2, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2), \tag{16.10}$$

соответственно

$$(\psi_1, \psi_2, -\dot{\psi}_1, -\dot{\psi}_2). \tag{16.11}$$

Каждое из этих подпространств двумерно; обозначим их через V^+, V^-. Тогда все пространство биспиноров разлагается в прямую сумму

$$V = V^+ \oplus V^-. \tag{16.12}$$

Из перестановочности $D[r]$ с $i\gamma_0$ следует, что оба подпространства V^+, V^- инвариантны относительно преобразований $D[r]$, и каждое из них может быть принято, тем самым, за подпространство V' предыдущего построения.

Для построения «волновых функций» $u(\boldsymbol{p}, \sigma)$ применим к вектору $u(\sigma)$, выбранному в пространстве V^+, оператор $D[b(\boldsymbol{p})]$; полученный вектор $u(\boldsymbol{p}, \sigma)$, конечно, не будет уже собственным вектором оператора $i\gamma_0$, но может быть охарактеризован как собственный вектор оператора $D[b(\boldsymbol{p})]\, i\gamma_0 D^{-1}[b(\boldsymbol{p})]$:

$$u(\boldsymbol{p}, \sigma) = D[b(\boldsymbol{p})]\, u(\sigma) = D[b(\boldsymbol{p})]\, i\gamma_0 u(\sigma) =$$
$$= (D[b(\boldsymbol{p})]\, i\gamma_0 D^{-1}[b(\boldsymbol{p})])\, u(\boldsymbol{p}, \sigma). \tag{16.13}$$

Поскольку для *эрмитовых* матриц (6.7) превращается в

$$D[b(\boldsymbol{p})] = \left[\begin{array}{c|c} b(\boldsymbol{p}) & 0 \\ \hline 0 & b^{-1}(\boldsymbol{p}) \end{array}\right],$$

имеем

$$D[b(\boldsymbol{p})]\, i\gamma_0 = i\gamma_0 D[b^{-1}(\boldsymbol{p})] = i\gamma_0 D^{-1}[b(\boldsymbol{p})].$$

Отсюда

$$D[b(\boldsymbol{p})]\, i\gamma_0 D^{-1}[b(\boldsymbol{p})] = D^2[b(\boldsymbol{p})]\, i\gamma_0.$$

Но, как показывает простой подсчет, опирающийся на (5.21)

$$D^2[b(\boldsymbol{p})] = \frac{1}{m}\left(\begin{array}{c|c} \tilde{p} & 0 \\ \hline 0 & \tilde{p}' \end{array}\right),$$

где

$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} p_0 + p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & p_0 - p_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{p}' = \begin{pmatrix} p_0 - p_3 & -p_1 + ip_2 \\ -p_1 - ip_2 & p_0 + p_3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$D^2[b(\boldsymbol{p})]\, i\gamma_0 = \frac{1}{m}\left(\begin{array}{c|c} 0 & \tilde{p} \\ \hline \tilde{p}' & 0 \end{array}\right) = \frac{1}{m} i\gamma(p),$$

где $\gamma(p) = p_\alpha \gamma^\alpha$ (ср. § 6).

Теперь из (16.13) имеем

$$\gamma(p)\, u(\boldsymbol{p}, \sigma) = -imu(\boldsymbol{p}, \sigma). \tag{16.14}$$

Точно так же для исходного вектора $v(\sigma)$ из пространства V^- получаем

$$\gamma(p)\, v(\boldsymbol{p}, \sigma) = imv(\boldsymbol{p}, \sigma). \tag{16.15}$$

Квантованное поле (16.7), составленное с помощью «волновых функций» $u(\boldsymbol{p}, \sigma)$, $v(\boldsymbol{p}, \sigma)$, в силу (16.14) и (16.15) удовлетворяет *уравнению Дирака*. Если взять вектор $u(\sigma)$ из пространства V^-, а вектор $v(\sigma)$ из V^+, то мы приходим к квантованному полю, удовлетворяющему «сопряженному» уравнению Дирака

$$(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0.$$

Таким образом, уравнение Дирака для квантованного поля может быть получено из описанного выше общего выражения квантованных полей через операторы рождения и уничтожения.

§ 17. Малые группы Вигнера и представления группы Пуанкаре

В этом параграфе мы рассмотрим более подробно представления накрывающей специальной группы Пуанкаре $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Напомним, что элементы этой группы имеют вид (a, u), где a — вектор сдвига в пространстве Минковского, а u — бинарная матрица; пара (a, u) накрывает пару (a, Λ), где $\Lambda = h(u)$ — собственное ортохронное преобразование Лоренца. Имея в виду приложения к полям, рассмотренные выше, мы обозначаем здесь точку пространства Минковского через p, а ее координаты в псевдоортонормированном базисе — через (p^0, p^1, p^2, p^3). Как мы видели, при построении массивных полей играют важную роль бесконечномерные представления накрывающей группы Пуанкаре, заданные формулой (14.10). Их построение зависит, в свою очередь, от выбранного представления $R^{(j)}$ подгруппы $SU(2)$, соответствующего наибольшему по абсолютной величине значению поляризации, т. е. спину частиц поля.

Мы попытаемся теперь осмыслить роль подгруппы $SU(2)$ в проведенном построении с математической стороны. Это приведет нас к понятию «малой группы», введенному Вигнером и оказавшемуся весьма плодотворным при изучении групп, аналогичных группе Пуанкаре[1]). В частности, с помощью этого метода ниже будут рассмотрены безмассовые поля, что связано с некоторыми тонкими математическими и физическими вопросами.

Малая группа для времениподобного вектора. Фиксируем времениподобный вектор $\mathfrak{m}$ и назовем *малой группой*, соответствующей $\mathfrak{m}$, подгруппу группы $SL(2)$, состоящую из всех бинарных матриц u, оставляющих вектор $\mathfrak{m}$ неподвижным:

$$u\tilde{\mathfrak{m}}u^* = \tilde{\mathfrak{m}}, \tag{17.1}$$

[1]) Такими группами являются, например, группа движений «обычного» пространства и «пространственные группы» в кристаллографии.

где $\tilde{m}$ пишется вместо $\tilde{\mathfrak{m}}$. Выбирая систему координат так, чтобы ось p^0 была направлена вдоль вектора $\mathfrak{m}$, можно считать компоненты $\mathfrak{m}$ равными $(m, 0, 0, 0)$, а матрицу $\tilde{m}$ взять в виде

$$\tilde{m} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = m \cdot 1. \tag{17.2}$$

Тогда условие (17.1) принимает вид $u\mathring{u} = 1$, а это значит, что матрица u унитарна. Итак, малая группа для времениподобного вектора есть $SU(2)$. Этот факт становится особенно наглядным, если перейти к накрываемой группе $L_+^\uparrow$. Ясно, что в этой группе вектор $\mathfrak{m}$ сохраняют все пространственные вращения (с положительным определителем), и только они.

Малая группа для изотропного вектора. Поскольку все преобразования из $SL(2)$ сохраняют направление времени, мы рассмотрим лишь случай изотропного вектора $\mathfrak{k}$, принадлежащего передней полости светового конуса. Чтобы найти малую группу вектора $\mathfrak{k}$, выберем систему координат, в которой $\mathfrak{k}$ имеет компоненты $(k, 0, 0, k)$. Соответствующая эрмитова матрица

$$\tilde{k} = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{17.3}$$

а условие ее сохранения

$$u\tilde{k}\mathring{u} = \tilde{k} \tag{17.4}$$

сводится к

$$|u_1^1| = 1, \quad u_{21} = 0;$$

следовательно, матрицы малой группы имеют вид

$$u = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & w \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \tag{17.5}$$

где $u_2^2 = e^{-i\varphi}$ находится из условия $\det u = 1$, а w — любое комплексное число. Обозначим группу всех матриц этого вида через G_0.

Чтобы представить себе строение малой группы, положим в (17.5) $w=e^{-i\varphi}z$; тогда имеем

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & e^{-i\varphi_1}z_1 \\ 0 & e^{-i\varphi_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi_2} & e^{-i\varphi_2}z_2 \\ 0 & e^{-i\varphi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} & e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}\left(e^{2i\varphi_1}z_2+z_1\right) \\ 0 & e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{pmatrix}. \quad (17.6)$$

Соответствие h_0, заданное формулой

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & e^{-i\varphi}z \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \to (z,\ 2\varphi), \quad (17.7)$$

сопоставляет каждой матрице малой группы пару, состоящую из угла 2φ и комплексного числа z; эта пара задает в свою очередь вращение плоскости комплексного переменного на угол 2φ вокруг начала координат с последующим сдвигом на z. Из (17.6) видно что если двум матрицам малой группы соответствуют пары $(z_1,\ 2\varphi_1)$, $(z_2,\ 2\varphi_2)$, то их произведению соответствует пара $(e^{2i\varphi_1}z_2+z_1,\ 2\varphi_1+2\varphi_2)$; таким образом, умножению матриц (17.7) соответствует последовательное выполнение движений плоскости.

Можно истолковать это следующим образом (ср. § 3): *h_0 есть гомоморфизм малой группы на группу всех движений плоскости.* Однако малая группа не изоморфна этой последней группе, поскольку матрицам $\pm u$ соответствует одно и то же движение:

$$\begin{pmatrix} -e^{i\varphi} & -e^{-i\varphi}z \\ 0 & -e^{-i\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(\varphi+\pi)} & e^{-i(\varphi+\pi)}z \\ 0 & e^{-i(\varphi+\pi)} \end{pmatrix} \to (z,\ 2\varphi+2\pi). \quad (17.8)$$

Итак, *малая группа изотропного вектора есть двулистная накрывающая группы движений двумерной действительной плоскости.*

Можно было бы найти малые группы и для других случаев: для пространственноподобного вектора, для временииподобного и изотропного векторов, направленных в сторону убывания времени, и, наконец, для вектора $p=0$. Как мы увидим дальше, эти малые группы не применяются по физическим соображениям.

Представления малой группы. Для малой группы времениподобного вектора все представления (группы $SU(2)$) были найдены в § 9. Найдем неприводимые *унитарные* представления малой группы G_0 изотропного вектора. Группа G_0 порождается двумя подгруппами: состоящей из матриц

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \tag{17.9}$$

и состоящей из матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{17.10}$$

это значит, что каждая матрица из G_0 (см. (17.5)) получается как произведение матрицы вида (17.10) на матрицу вида (17.9). Каждое представление группы G_0 задает представление (в том же пространстве) обеих подгрупп (17.9), (17.10). Если при этом указаны представления обеих подгрупп, то по определению представления однозначно находятся и представляющие операторы для общих матриц G_0.

Подгруппа (17.10) изоморфна группе комплексных чисел с операцией сложения, так как при умножении матриц вида (17.10) числа z складываются. Так как комплексная плоскость некомпактна, группа G_0 тем более некомпактна, и поэтому не имеет конечномерных унитарных представлений, за исключением одномерного (ср. § 9, где было отмечено аналогичное свойство группы Пуанкаре). В одномерном представлении все матрицы (17.10) представляются числом 1. Что касается матриц (17.9), то в силу унитарности искомого представления такой матрице должно соответствовать число $e^{i\varphi'}$, где φ' зависит от φ. Поскольку при умножении матриц (17.9) числа φ складываются, а представляющие числа $e^{i\varphi'}$ умножаются, сложению углов φ_1, φ_2 соответствует сложение углов φ_1', φ_2'; таким образом, φ' имеет вид $n\varphi$. При $\varphi = 2\pi$, вследствие однозначности представления, φ' должно быть целым кратным 2π; поэтому n — целое число, и искомое одномерное представление задается формулой

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & e^{-i\varphi}z \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \to e^{in\varphi}, \qquad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \tag{17.11}$$

Все представления (17.11), получаемые при всевозможных целых n, унитарны, и можно доказать, что никаких других унитарных конечномерных представлений группа G_0 не имеет.

Описание всех унитарных представлений группы Пуанкаре. Формула (14.10), задающая представления группы $\mathscr{P}_{+}^{\uparrow}$ в пространстве массивных частиц, служит образцом для построения всех унитарных представлений этой группы. Мы укажем *полный набор неприводимых унитарных представлений* $\tilde{\mathscr{P}}_{+}^{\uparrow}$, т. е. такой, что каждое неприводимое унитарное представление $\tilde{\mathscr{P}}_{+}^{\uparrow}$ эквивалентно одному из представлений набора. При этом, чтобы избежать математических трудностей (вкратце обсуждаемых ниже), мы ограничимся представлениями элементов группы $\tilde{\mathscr{P}}_{+}^{\uparrow}$, достаточно близких к единичному.

Действие группы $SL(2)$ на пространстве Минковского $\mathscr{M}$ (посредством специальных преобразований Лоренца $\Lambda=h(u)$) приводит к разбиению $\mathscr{M}$ на орбиты — подмножества, точки каждого из которых можно перевести друг в друга преобразованием группы. Перечислим типы существующих орбит, обозначая векторы пространства Минковского через p:

1. $(p,\ p)=m^2>0, \quad p^0>0$;
2. $(p,\ p)=m^2>0, \quad p^0<0$;
3. $(p,\ p)=-m^2<0$;
4. $(p,\ p)=0, \quad p^0>0$;
5. $(p,\ p)=0, \quad p^0<0$;
6. $\quad p=0$.

Неприводимое унитарное представление группы $\tilde{\mathscr{P}}_{+}^{\uparrow}$ строится ниже последовательными шагами (1)—(8). При этом лишь на первом и четвертом шаге делаются *существенные* выборы, от которых зависит результат построения. Итак:

(1) Фиксируется некоторая орбита;

(2) На выбранной орбите берется произвольный вектор k;

(3) Строится малая группа G_0, состоящая из всех бинарных матриц u, сохраняющих k (ср. (17.4));

(4) Задается неприводимое унитарное представление W малой группы G_0;

(5) В пространстве представления W выбирается ортонормированный базис (e_σ), к которому относятся векторы этого пространства: $\Phi = \sum \Phi_\sigma e_\sigma$;

(6) Для каждого вектора p выбранной орбиты строится бинарная матрица $b(p)$, для которой преобразование Лоренца $\Lambda(p) = h(b(p))$ переводит выбранный вектор k в p. При этом $b(p)$ должна непрерывно зависеть от p, по крайней мере в окрестности $p = \mathrm{k}$;

(7) Для каждой бинарной матрицы u и каждого вектора p выбранной орбиты находится матрица малой группы

$$r[u, p] = b^{-1}(p)\, u b(\Lambda^{-1} p), \text{ где } \Lambda = h(u); \quad (17.12)$$

(8) Строятся матрицы $W[u, p]$, соответствующие $r[u, p]$ в выбранном унитарном представлении малой группы. После этого искомое представление группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ определяется в пространстве вектор-функций $\Phi(p)$, заданных на выбранной орбите, следующей формулой:

$$U[a, u]\, \Phi(p) = \Phi'(p),$$

где

$$\Phi'(p) = e^{i(pa)} \sum_\tau W_{\sigma\tau}[u, p]\, \Phi_\tau(\Lambda p^{-1}), \quad \Lambda = h(u). \quad (17.13)$$

Это представление, с точностью до эквивалентности, однозначно определяется выбором орбиты и представления W малой группы (точнее, класса эквивалентных представлений малой группы). Таким образом, в предыдущем построении имеются несущественные выборы, не меняющие, с точностью до эквивалентности, окончательного представления группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$: а) выбор вектора на фиксированной орбите; б) выбор унитарного неприводимого представления W малой группы из класса эквивалентных представлений такого рода; в) выбор ортонормированного базиса (e_σ) в пространстве представления W; г) выбор семейства бустов $b(p)$, переводящих k в p и непрерывно зависящих от p.

Бусты $b(p)$, которые должны быть построены на шестом шаге, не всегда могут быть выбраны *непрерывными* относительно p на всей орбите. Это возможно в случае орбит положительной массы, как мы видели в § 5, но уже не удается для орбит нулевой массы. Для векторов p, *достаточно близких к* k, непрерывный выбор $b(p)$ всегда возможен; но тогда искомое представление оказывается определенным лишь для бинарных матриц u, достаточно близких к единичной. Из дальнейшего изложения будет ясно, какие матрицы считаются в этом смысле «достаточно близкими» к единичной.

Скалярное произведение (14.13) превращает пространство вектор-функций $\Phi(p)$ в гильбертово пространство, и по отношению к этому произведению определенные выше представления группы $\tilde{\mathscr{P}}_+^\uparrow$ *унитарны*. Наконец, они образуют *полный набор* неприводимых унитарных представлений $\tilde{\mathscr{P}}_+^\uparrow$; представления с разными орбитами или неэквивалентными W оказываются при этом не эквивалентными друг другу.

В частном случае орбит первого типа ($m^2>0$, $p^0>0$) мы возвращаемся к представлениям для массивных полей, полученным в § 14 из общих свойств преобразования полей и перестановочных соотношений для операторов рождения и уничтожения. Орбиты второго типа (с «отрицательными энергиями» p^0) оказываются излишними, если ввести понятие античастицы и перенести тем самым все поля на положительную полу гиперболоида $(p, p)=m^2$; именно таким образом и поступают в современных изложениях теории поля. Орбитам третьего типа соответствуют отрицательные собственные значения оператора $M^2=P_0^2-P_1^2-P_2^2-$ $-P_3^2$; поскольку в физике не встречалось до сих пор надобности приписать каким-либо частицам мнимую массу, соответствующие представления дальше не рассматриваются. Орбиты четвертого типа приводят к представлениям для безмассовых полей, обсуждаемым ниже. Орбиты пятого типа оказываются излишними, если ввести понятие античастиц и перенести все поля на положительную полу конуса $(p, p)=0$. Наконец, для орбит шестого типа $k=0$ малая группа G_0 совпадает с $SL(2)$, и унитарные представления этой группы W могут быть только бесконечномерными. Но тогда число компонент соответствующего поля, как видно из (17.13), также было бы бесконечно. Поля с бесконечным числом компонент иногда рассматривались в литературе, но пока не ясно, можно ли их связать с какими-либо экспериментальными объектами. Поэтому мы не рассматриваем и этого случая.

По только что упомянутой причине и в других случаях рассматриваются лишь *конечномерные* унитарные представления W, чем мы и ограничились выше.

Для «массивных» представлений, т. е. для орбит типа (1), как мы уже видели, неприводимое представление группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ однозначно задается числом $m>0$ и значением спина j, совпадающим с индексом $(2j+1)$-мерного представления $R^{(j)}$ подгруппы $SU(2)$ (ср. § 9). В этом случае бусты $b(p)$ могут быть однозначно заданы для *всех* p как непрерывные функции от p (см. § 5); тем самым формулы (17.13) задают представление группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ ***в целом*** (а не только для бинарных матриц, близких к единичной).

Для «безмассовых» представлений, т. е. для орбит типа (4), дело обстоит иначе. В этом случае неприводимое представление группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ задается единственным целым числом n, определяющим представление малой группы (17.11). В следующем параграфе мы выясним физический смысл этого числа. Что же касается бустов $b(p)$, то при их построении встречается трудность, из-за которой нам пришлось выше ограничиться представлением «малых» бинарных преобразований. Чтобы не смешивать фиксированный вектор p, от которого зависит $b(p)$, с радиусом-вектором любой точки конуса, будем искать $b(q)$. По определению,

$B(q)$ должно переводить вектор $\mathbf{k}=(k, 0, 0, k)$ в заданный изотропный вектор $q=(q^0, q^1, q^2, q^3)$, $q^0>0$. Для построения такого буста можно сначала взять вектор $q'=(q^0, 0, 0, q^0)$ и преобразовать $\mathbf{k}$ в q' с помощью «гиперболического вращения» в плоскости (p^0, p^3):

$$p'^0=p^0 \operatorname{ch}\vartheta+p^3 \operatorname{sh}\vartheta, \tag{17.14}$$
$$p'^3=p^0 \operatorname{sh}\vartheta+p^3 \operatorname{ch}\vartheta.$$

Поскольку $k>0$ и $q^0>0$, существует единственное значение ϑ, при котором (k, k) переходит в (q^0, q^0): это решение уравнения $k(\operatorname{ch}\vartheta+\operatorname{sh}\vartheta)=q^0$. Умножая обе части его на $\operatorname{ch}\vartheta-\operatorname{sh}\vartheta$, находим

$$q^0(\operatorname{ch}\vartheta-\operatorname{sh}\vartheta)=k, \quad \operatorname{ch}\vartheta=\frac{1}{2}\left(\frac{q^0}{k}+\frac{k}{q^0}\right),$$

$$\operatorname{sh}\vartheta=\frac{1}{2}\left(\frac{q^0}{k}-\frac{k}{q^0}\right),$$

откуда

$$\vartheta=\ln\frac{q^0}{k}. \tag{17.15}$$

Очевидно, преобразование непрерывно зависит от q^0, т. е. от вектора q. Остается произвести пространственное вращение, переводящее вектор $(0, 0, q^0)$ в $\boldsymbol{q}=(q^1, q^2, q^3)$. Но как раз такое вращение и нельзя определить для всех q как однозначную непрерывную функцию от q! Это возможно для всех векторов q с $q^3>-q^0$: в этом случае достаточно производить вращение в плоскости векторов $(0, 0, q^0)$, (q^1, q^2, q^3). Таким образом, выражение «$B(q)$ можно построить непрерывно зависящим от q для всех q, достаточно близких к $\mathbf{k}$» означает в случае $m=0$, что $q^3>-q^0$, т. е. исключаются точки светового конуса вида $(q^0, 0, 0, -q^0)$.

Накрывающие бинарные матрицы $b(p)$ в этом случае строятся без труда. Чтобы записать бусты $b(p)$, обозначим накрывающую бинарную матрицу найденного выше преобразования (17.14), соответствующего p, через $\beta(p)$. Накрывающую бинарную матрицу вращения на угол, меньший π, переводящего вектор $(0, 0, p^0)$ в (p^1, p^2, p^3), с осью вращения, образующей правую систему осей с векторами $(0, 0, p^0)$ и (p^1, p^2, p^3), обозначим через $\rho(p)$ (здесь предполагается, что $p^3 > -p^0$). Тогда имеем

$$b(p) = \rho(p)\,\beta(p). \tag{17.16}$$

Здесь $\beta(p)$ накрывает специальное преобразование Лоренца (17.14), действующее в плоскости (p^0, p^3), и, следовательно, получается из (5.17) при $n_1 = n_2 = 0$:

$$\beta(p) = \operatorname{ch}\vartheta - \sigma_3 \operatorname{sh}\vartheta, \tag{17.17}$$

где ϑ зависит от p.

Чтобы построить представление «в целом», т. е. для *всех* бинарных матриц, требуются математические средства, выходящие за рамки нашей книги — так называемые «векторные расслоения» (см. [15]).

Ограничиваясь бинарными матрицами, «близкими к единичной», можно переписать формулу (17.13) *для безмассовых частиц* в виде

$$U[a, u]\,\Phi(p) = \Phi'(p), \quad \Phi'(p) = e^{i(pa)} e^{in\varphi}\,\Phi(\Lambda^{-1}p), \tag{17.18}$$

где $\Lambda = h(u)$, φ определяется по матрице малой группы (17.12), как это было описано выше (см. (17.5)), а n — целое число, задающее представление (17.11) малой группы и тем самым группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Как мы видим, *все унитарные представления накрывающей группы Пуанкаре $\mathscr{P}_+^\uparrow$, соответствующие частицам нулевой массы, задаются на пространстве $\mathfrak{H}_0$ однокомпонентных функций, определенных на переднем поле светового конуса $(p, p) = 0$, $p^0 > 0$.*

§ 18. Безмассовые частицы

Для частиц нулевой массы мы заново просмотрим определения основных наблюдаемых, данные в § 15, отмечая возникающие здесь различия. В особенности значительно различие в определении состояний поляризации, которую для безмассовых частиц приходится, по существу, заменить другим понятием.

Импульс и энергия. Определение операторов 4-импульса, данное в § 15, переносится на безмассовые частицы. Различие в результатах связано с тем, что теперь векторы состояния — *однокомпонентные* функции $\Phi(p)$, заданные на конусе $(p, p)=0$, $p^0>0$. Вследствие этого вместо (15.3) получаем

$$P_\alpha \Phi(p) = p_\alpha \Phi(p). \tag{18.1}$$

Состояния с определенным 4-импульсом имеют тот же вид, что в § 15, но с выражением $\omega(\boldsymbol{p})$, соответствующим конусу, и без индекса σ:

$$|\boldsymbol{p}\rangle = 2\omega(\boldsymbol{p})\,\delta(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}), \quad \omega(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\boldsymbol{p}^2}. \tag{18.2}$$

Точно так же, как в § 15, показывается, что спектр операторов 4-импульса задается условием

$$(p^0)^2 - \boldsymbol{p}^2 = 0, \tag{18.3}$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered} p^0 > 0, \\ -\infty < p^k < \infty \qquad (k=1,\ 2,\ 3). \end{gathered} \tag{18.4}$$

Случай $p^0=0$ здесь исключается, поскольку функции $\Phi(p)$, на которые действуют операторы представления P_α, определены лишь при $p^0>0$ (точка $p=0$ составляет другую орбиту, типа (6), и не имеет отношения к рассматриваемому представлению группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$, заданному формулами (17.18)!). Это заключение, на первый взгляд формально-математического характера, в действительности имеет важное физическое значение: если безмассовая частица, *по определению*, задается неприводимым представлением группы Пуанкаре, то можно *доказать*, что она не может находиться в состоянии с нулевой энергией.

Момент. Определение операторов момента, данное в § 15, также переносится на безмассовые частицы, но ввиду однокомпонентности функций Φ вычисления принимают другой характер. Мы должны теперь отправляться от формулы (17.18), задающей представление группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ и тем самым безмассовую частицу.

Однопараметрическая подгруппа вращений вокруг оси z по-прежнему задается формулой (15.10), причем матрица

$$r(\vartheta)=\begin{pmatrix} e^{\frac{i\vartheta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\vartheta}{2}} \end{pmatrix}, \tag{18.5}$$

накрывающая вращение на угол ϑ, принадлежит малой группе G_0. Поэтому вместо (15.11) получаем

$$U[0,\ r(\vartheta)]\,\Phi(p)=e^{in\varphi}\Phi(R(\vartheta)^{-1}p),\quad R(\vartheta)=h(r(\vartheta)), \tag{18.6}$$

где φ зависит от ϑ, как это описано в § 17.

Повторяя выкладки § 15, имеем (ср. (15.15))

$$iM_3\Phi(p)=\frac{d}{d\vartheta}e^{in\varphi}\Big|_{\vartheta=0}\Phi(p)+\left(\frac{d}{d\vartheta}\Phi(R(\vartheta)^{-1})\right)_{\vartheta=0}. \tag{18.7}$$

Второе слагаемое приводит, в точности как в § 15, к оператору орбитального момента

$$O_3\Phi(p)=-\frac{1}{i}\left(p_1\frac{\partial}{\partial p^2}-p_2\frac{\partial}{\partial p^1}\right)\Phi(p). \tag{18.8}$$

Назовем, по аналогии с § 15, первое слагаемое в (18.7) *оператором поляризации*. Для вычисления производной в первом слагаемом заметим, что если в (17.12) заменить u на $r(\vartheta)$, Λ — на соответствующее вращение $R(\vartheta)$, то из (17.16) получаем

$$r[r(\vartheta),p]=\beta^{-1}(p)\,\rho^{-1}(p)\,r(\vartheta)\,\rho(R(\vartheta)^{-1}p)\,\beta(R(\vartheta)^{-1}p). \tag{18.9}$$

Поскольку для векторов p и $R(\vartheta)^{-1}p$ число p^0 одно и то же (см. вывод формулы (17.16)), $\beta(R(\vartheta)^{-1}p)=\beta(p)$. Далее, как легко видеть из смысла соответствующих вращений,

$$\rho(R(\vartheta)^{-1}p)=r(\vartheta)^{-1}\rho(p)\,r(\vartheta).$$

Внося все это в (18.9), имеем

$$r[r(\vartheta),\ p]=\beta^{-1}(p)\ r(\vartheta)\ \beta(p). \tag{18.10}$$

Выразим зависимость φ от ϑ, записав эту матрицу в виде

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & e^{-i\varphi}z \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} = \beta^{-1}(p) \begin{pmatrix} e^{\frac{i\vartheta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\vartheta}{2}} \end{pmatrix} \beta(p). \qquad (18.11)$$

Разлагая обе части в ряды по φ, ϑ и сохраняя лишь первые два члена, находим

$$\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\varphi \begin{pmatrix} 1 & -z \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{i\vartheta}{2} \beta^{-1}(p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \beta(p).$$

Отсюда видно, что $z=0$. Так как в силу (17.17) $\beta(p)$ коммутирует с σ_3, получаем с той же точностью первого порядка $\varphi = \vartheta/2$, откуда

$$\left(\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=0} = \frac{1}{2}. \qquad (18.12)$$

Возвращаясь к (18.7), можно теперь найти первое слагаемое (ср. (15.18)):

$$iS_3 = \frac{d}{d\vartheta} e^{in\varphi}\Big|_{\vartheta=0} = \frac{in}{2}, \quad S_3 = \frac{n}{2}. \qquad (18.13)$$

Таким образом, *для безмассовой частицы, заданной представлением* (17.18) *группы Пуанкаре* $\mathcal{P}_+^{\uparrow}$, *оператор поляризации сводится к умножению вектора состояния на целые или полуцелые числа* $\lambda = n/2$.

Следовательно, единственным возможным значением поляризации как раз и является это число, так что *частица нулевой массы имеет только одно состояние поляризации*.

Точно так же, как для массивных частиц, мы назовем *спином* частицы наибольшее абсолютное значение ее поляризации. Тогда спин $j = |n|/2$, и *значения спина могут быть только целыми или полуцелыми*. Мы видим, что этот факт, как и в случае массивных частиц, является следствием самого определения элементарной частицы с помощью неприводимого представления группы Пуанкаре.

Отметим очень важное различие между массивными и безмассовыми частицами: в то время как для массивной частицы со спином j возможны все $2j+1$ значений поляризации $-j$, $-j+1$, ..., $j-1$, j, *для безмассовой частицы со спином j возможно лишь одно значение поляризации λ, равное либо $+j$, либо $-j$*, которое называется ее *спиральностью*.

Физическое истолкование спиральности, указанное в § 15, остается в силе и для безмассовых частиц: спиральность равна проекции момента инерциально движущейся частицы на направление ее движения. Однако для частиц нулевой массы это значение определяется *однозначно*, в то время как для массивных частиц оно может пробегать все (целые или полуцелые) значения от $-j$ до j. В частности, по знаку спиральности безмассовые частицы можно разделить на «правовинтовые» и «левовинтовые».

Таким образом, все представления группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$, соответствующие орбите четвертого типа (передняя пола светового конуса), могут быть занумерованы спином и знаком спиральности: $[j, +]$, $[j, -]$, $j=0$, $1/2$, 1, $3/2$, ...

Примеры. Безмассовые частицы со спином 0 в природе неизвестны; этот факт не имеет убедительного теоретического объяснения.

При $j=1/2$ и спиральности $\mp 1/2$ получаем соответственно нейтрино и антинейтрино. Теория, основанная на группе Пуанкаре, не делает различия между электронным и мюонным нейтрино. Это не противоречит опыту, а свидетельствует лишь о неполноте теории: одно и то же представление группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ может описывать разные частицы, отличающиеся некоторыми «внутренними квантовыми числами», не вытекающими из группы Пуанкаре.

При $j=1$ и спиральности ∓ 1 получаем правополяризованный (соответственно левополяризованный) фотон. Следует подчеркнуть, что в теории, основанной на представлениях *специальной* (связной) группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$, мы должны считать эти частицы различными. Если, однако, перейти к группе $\mathscr{P}^\uparrow$, пополненной пространственным отражением, то представления этой группы строятся в виде $[j, +] \oplus [j, -]$, т. е.

с помощью «удвоения» пространства представления, аналогичного тому, которое мы уже встретили для электрона и позитрона. С этой точки зрения право-поляризованный и левополяризованный фотоны оказываются состояниями одной частицы — фотона.

Теория групп не дает критерия, какие частицы следует классифицировать по представлениям специальной группы Пуанкаре и какие — по представлениям полной группы $\mathscr{P}$. Действительные основания для этого приходится, во всяком случае в настоящее время, брать из эксперимента. Реакции между частицами позволяют ввести для частиц понятие «внутренней четности», тесно связанное с пространственным отражением и позволяющее устанавливать связи между «пространственно симметричными» реакциями.

В случае участия нейтрино и антинейтрино таких связей между реакциями получить нельзя, так что этим частицам невозможно разумным образом приписать внутреннюю четность. Поэтому не имеет смысла говорить о преобразовании вектора состояния нейтрино или антинейтрино при пространственном отражении. Мы вынуждены описывать эти частицы представлениями *специальной* группы Пуанкаре $\mathscr{P}_+^\uparrow$. Так как спиральность обеих частиц, как известно из опыта, различна, они описываются *неэквивалентными* неприводимыми представлениями группы $\mathscr{P}_+^\uparrow$ и, тем самым, должны считаться *разными* частицами.

Для фотона, напротив, понятие внутренней четности имеет смысл и позволяет установить связи между реакциями посредством пространственного отражения. Мы должны поэтому допустить, что вектор состояния фотона может быть подвергнут действию оператора пространственного отражения. Но тогда фотон должен описываться представлением *полной* группы Пуанкаре $\mathscr{P}$, и оба возможных состояния поляризации фотона $+1$ и -1 должны быть связаны с *одним* неприводимым представлением этой группы (см. § 20). В этом смысле «правополяризованный» и «левополяризованный» фотон считаются состояниями *одной и той же* частицы.

§ 19. Безмассовые поля

В § 14 мы пришли к вигнеровским представлениям группы Пуанкаре, отправляясь от трансформационных свойств полей. При этом в случае массивных полей, число компонент поля было взято равным числу компонент вектор-функций $\Phi_\sigma(p)$, на которых задается неприводимое унитарное представление группы Пуанкаре (и которые служат векторами состояния системы). Это простейшее предположение было расширено в § 16, где наиболее общие массивные поля конструировались из неприводимых унитарных представлений группы Пуанкаре, с помощью которых определяются кванты этих полей. При этом число компонент поля оказывалось, вообще говоря, больше числа компонент векторов состояния, вследствие чего для получения неприводимого представления группы Пуанкаре в пространстве полей приходилось накладывать на компоненты поля некоторые линейные связи («динамические уравнения»).

В случае безмассовых частиц мы не будем заранее предполагать, каково число компонент поля; что же касается вектор-функций вигнеровского представления, то они, как мы знаем из § 17, в этом случае *однокомпонентны*. Используя этот математический результат в сочетании с конструкцией полей, аналогичной построению в § 16, можно вывести замечательную теорему Вайнберга о возможных типах полей для безмассовых частиц.

Общие безмассовые поля. Как и в § 16, общие поля для безмассовых частиц строятся как преобразования Фурье от операторов рождения и уничтожения. Для частиц определенной спиральности λ поле $\overset{+}{\psi}_n(x)$ выражается через операторы рождения $\overset{+}{a}(\boldsymbol{p})$ в виде (ср. (12.36))

$$\overset{+}{\psi}_n(x) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{i(px)} u_n(\boldsymbol{p})\, \overset{+}{a}(\boldsymbol{p}) \frac{d\boldsymbol{p}}{2\omega(\boldsymbol{p})}, \qquad (19.1)$$

где $u_n(\boldsymbol{p})$ — «волновые функции», $\omega(\boldsymbol{p}) = |\boldsymbol{p}|$, а n пробегает $(2j+1)(2j'+1)$ значений, соответственно размерности представления (j, j') бинарной группы, по которому должны преобразовываться компоненты поля $\overset{+}{\psi}_n(x)$. Аналогично строится поле $\underset{+}{\psi}_n(x)$.

По общему правилу преобразования полей (ср. (10.15)) должно быть

$$U[u]\overset{+}{\psi}_n(x)U^{-1}[u]=\sum_m \bar{D}_{nm}[u^{-1}]\overset{+}{\psi}_m(\Lambda x), \qquad (19.2)$$

где $\Lambda=h(u)$, $D[u^{-1}]$ — матрица представления (j, j'); вследствие (19.1) это равносильно

$$\int e^{i(px)}u_n(\boldsymbol{p})U[u]\overset{+}{a}(\boldsymbol{p})U^{-1}[u]\frac{d\boldsymbol{p}}{2\omega(\boldsymbol{p})}=$$

$$=\int e^{i(p,\Lambda x)}\sum_m \bar{D}_{nm}[u^{-1}]u_m(\boldsymbol{p})\overset{+}{a}(\boldsymbol{p})\frac{d\boldsymbol{p}}{2\omega(\boldsymbol{p})}=$$

$$=\int e^{i(\Lambda^{-1}p,x)}\sum_m \bar{D}_{nm}[u^{-1}]u_m(\boldsymbol{p})\overset{+}{a}(\boldsymbol{p})\frac{d\boldsymbol{p}}{2\omega(\boldsymbol{p})}.$$

Выполним замену переменных $\Lambda^{-1}p\to p$; учитывая инвариантность меры

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{\omega(\boldsymbol{p})}=\frac{d\boldsymbol{p}'}{\omega(\boldsymbol{p}')},$$

имеем

$$\int e^{i(px)}u_n(\boldsymbol{p})U[u]\overset{+}{a}(\boldsymbol{p})U^{-1}[u]\frac{d\boldsymbol{p}}{2\omega(\boldsymbol{p})}=$$

$$=\int e^{i(px)}\sum_m \bar{D}_{nm}[u^{-1}]u_m(\overrightarrow{\Lambda p})\overset{+}{a}(\overrightarrow{\Lambda p})\frac{d\boldsymbol{p}}{2\omega(\boldsymbol{p})}. \qquad (19.3)$$

Нормируя состояния с определенным значением импульса, как в (14.1), получаем для безмассовых частиц

$$\sqrt{\omega(\boldsymbol{p})}\,\overset{+}{a}(\boldsymbol{p})\Phi_0=|\boldsymbol{p}\rangle, \quad \sqrt{\omega(\overrightarrow{\Lambda p})}\,\overset{+}{a}(\overrightarrow{\Lambda p})\Phi_0=|\overrightarrow{\Lambda p}\rangle.$$

Применив теперь (19.3) к вектору вакуума Φ_0, имеем

$$\int e^{i(px)}u_n(\boldsymbol{p})U[u]\{\omega(\boldsymbol{p})\}^{-1/2}|p\rangle\frac{d\boldsymbol{p}}{2\omega(\boldsymbol{p})}=$$

$$=\int e^{i(px)}\sum_m \bar{D}_{nm}[u^{-1}]u_m(\overrightarrow{\Lambda p})\{\omega(\overrightarrow{\Lambda p})\}^{-1/2}|\overrightarrow{\Lambda p}\rangle\frac{d\boldsymbol{p}}{2\omega(\boldsymbol{p})},$$

откуда

$$u_n(\boldsymbol{p})\, U[u]\,|\,\boldsymbol{p}\rangle =$$

$$= \left\{\frac{\omega(\overrightarrow{\Lambda p})}{\omega(\boldsymbol{p})}\right\}^{-1/2} \sum_m D_{nm}[u^{-1}]\, u_m(\overrightarrow{\Lambda p})\,|\,\overrightarrow{\Lambda p}\rangle. \quad (19.4)$$

До сих пор мы использовали лишь закон преобразования полей. Теперь воспользуемся законом преобразования одночастичных состояний, следующий из вигнеровского представления (17.18) для частиц спиральности $\lambda = n/2$. Для этого возьмем явное выражение (18.2) состояний с определенным импульсом, переписав его в четырехмерном виде:

$$|\,p\rangle = \delta(q - p),$$

где q — аргумент функции $\Phi(q) = \delta(q-p)$, а p — фиксированное значение 4-импульса.

Согласно (17.18)

$$U[u]\,|\,p\rangle = e^{2i\lambda\varphi}\delta(\Lambda^{-1}q - p), \quad (19.5)$$

где φ задается матрицей малой группы (17.12):

$$\boldsymbol{r}[u,\ q] = b^{-1}(q)\, ub\,(\Lambda^{-1}q). \quad (19.6)$$

В силу уже неоднократно использованной инвариантности δ-функции $\delta(\Lambda^{-1}q - p) = \delta(q - \Lambda p)$, (19.5) принимает вид

$$U[u]\,|\,p\rangle = e^{2i\lambda\varphi}\delta(q - \Lambda p) = e^{2i\lambda\varphi}\,|\,\Lambda p\rangle,$$

или (ср. (15.6))

$$U[u]\,|\,\boldsymbol{p}\rangle = e^{2i\lambda\varphi}\frac{\omega(\overrightarrow{\Lambda p})}{\omega(\boldsymbol{p})}\,|\,\overrightarrow{\Lambda p}\rangle; \quad (19.7)$$

здесь φ определяется матрицей малой группы (19.6), в которой надо положить $q = \Lambda p$:

$$\boldsymbol{r}[u,\ \overrightarrow{\Lambda p}] = b^{-1}(\overrightarrow{\Lambda p})\, ub\,(\boldsymbol{p}). \quad (19.8)$$

Подставим (19.7) в (19.4); тогда для $v(\boldsymbol{p}) = \{\omega(\boldsymbol{p})\}^{-3/2} u(\boldsymbol{p})$ получаем

$$e^{2i\lambda\varphi} v_n(\boldsymbol{p}) = \sum_m \bar{D}_{nm}[u^{-1}]\, v_m(\overrightarrow{\Lambda p}). \tag{19.9}$$

Дальнейший вывод основан на этом соотношении.

Положим сначала в (19.9) $\boldsymbol{p} = \mathrm{k} = (0, 0, k)$, $\Lambda p = q$, $u = b(q)$; тогда из (19.8) имеем $r[u, \overrightarrow{\Lambda p}] = 1$, $\varphi = 0$, и (19.9) принимает вид

$$v_n(\boldsymbol{q}) = \sum_m \bar{D}_{nm}[b(\boldsymbol{q})]\, v_m(\mathrm{k}).$$

Подставляя это выражение в (19.9), находим

$$e^{2i\lambda\varphi} \sum_m \bar{D}_{nm}[b(\boldsymbol{p})]\, v_m(\mathrm{k}) = \sum_{m,\,l} \bar{D}_{nm}[u^{-1}]\, \bar{D}_{ml}[b(\overrightarrow{\Lambda p})]\, v_l(\mathrm{k}),$$

откуда

$$\sum_m D_{nm}[b^{-1}(\boldsymbol{p})\, u^{-1} b(\overrightarrow{\Lambda p})]\, \bar{v}_m(\mathrm{k}) = e^{-2i\lambda\varphi} \bar{v}_n(\mathrm{k}). \tag{19.10}$$

Справа в скобке стоит $r[u, \overrightarrow{\Lambda p}]^{-1}$. Для $\boldsymbol{p}$, близких к k, имеем с точностью первого порядка (ср. (17.7))

$$r[u, \overrightarrow{\Lambda p}] =$$
$$= 1 + i\left\{\varphi\tau_3 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, z \cdot (\tau_2 - \tau_1) + \frac{1}{2}\mathrm{Im}\, z \cdot (\tau_1 + \tau_2)\right\} + \ldots$$

В представлении $D^{(j,\, j')}$, согласно (9.51), (9.53), имеем

$$R[u, \overrightarrow{\Lambda p}]^{-1} = 1 - 2i\{(A_3 + B_3)\varphi + \varepsilon_1 A_- + \varepsilon_2 B_+\}, \tag{19.11}$$

где $\varepsilon_1 = i\bar{z}/2$, $\varepsilon_2 = -iz/2$.

Теперь из (19.10) следует

$$(A_3 + B_3)\, \bar{v}(\mathrm{k}) = \lambda \bar{v}(\mathrm{k}), \tag{19.12}$$

$$A_- \bar{v}(\mathrm{k}) = 0, \quad B_+ \bar{v}(\mathrm{k}) = 0. \tag{19.13}$$

Операторы A_-, B_+ задаются соотношениями (9.55), из которых нетрудно усмотреть, что (19.13) возможно лишь при

$$\bar{v}(\mathrm{k}) = \mathrm{const} \cdot \Phi_{j,\,-j'}.$$

Подставляя это в (19.12) и пользуясь (9.54), находим

$$j - j' = \lambda. \tag{19.14}$$

Мы доказали, таким образом, теорему Вайнберга: *Если неприводимое безмассовое поле задается представлением группы Лоренца* $(j,\ j')$, *то кванты его — частицы спиральности* $\lambda = j - j'$ [1]).

Примеры. 1) Рассмотрим сначала нейтрино (или антинейтрино). Спиральность в этом случае равна $-1/2$ или $1/2$, и согласно теореме Вайнберга для (неприводимых) нейтринных полей должно быть $j' - j = \pm 1/2$. Именно так обстоит дело с полем Вейля, рассмотренным в § 7, которое преобразуется по представлению $(1/2,\ 0)$, и с сопряженным ему полем, преобразующимся по представлению $(0,\ 1/2)$.

2) Для правополяризованного или левополяризованного фотона спиральность равна -1, соответственно 1. Следовательно, для «фотонного» (неприводимого) поля должно быть $j' - j = \pm 1$. Таковы поля $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} - i\boldsymbol{H}$, $\overset{*}{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{E} + i\boldsymbol{H}$, рассмотренные в § 10: они соответствуют представлениям $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, как видно из их размерности.

3) Шестикомпонентные поля $(\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{E})$ и $F_{\alpha\beta}$ преобразуются по *приводимым* представлениям группы Лоренца. В самом деле, эти представления, прежде всего, эквивалентны, как это видно из обычных линейных соотношений, выражающих компоненты второго поля через первое. Первое же из них приводимо, поскольку в *комплексном* шестимерном пространстве с координатами H_k, E_k содержатся инвариантные подпространства $\{\boldsymbol{H} + i\boldsymbol{E}\}$, $\{\boldsymbol{H} - i\boldsymbol{E}\}$ (напомним, что самое понятие приводимости относится к *комплексным* векторным пространствам).

4) Рассмотрим, наконец, электромагнитное поле, заданное 4-потенциалом A^{α}. Это поле преобразуется,

---

[1]) В литературе (и, в частности, в статье Вайнберга [56]) встречается также другое определение представлений $D^{(j,\ j')}$, отличающееся от принятого в этой книге перестановкой чисел $j,\ j'$.

как 4-вектор, т. е. по представлению (1/2, 1/2). Такое представление, по теореме Вайнберга, недопустимо. Причина этого запрета состоит в том, что вектор-потенциал описывает электромагнитное поле лишь с точностью до «калибровочных преобразований»; таким образом, истинное поле задается не одним 4-вектором, а целым *классом* эквивалентных вектор-потенциалов (см. [10], гл. VI). Необходимость калибровочных преобразований, как мы видим, тесно связана с наиболее общими конструкциями теории квантованных полей.

§ 20. Дискретные преобразования квантованных полей

По аналогии с преобразованиями классических полей (§ 7) мы определим для квантованных полей преобразования P, C, T.

Удвоение числа компонент. Пусть $\psi_\sigma(x)$ — квантованное поле, компоненты которого преобразуются по некоторому представлению $D^{(j,0)}$ группы $SL(2)$. Для каждого элемента (a, u) специальной группы Пуанкаре $\mathscr{P}_+^\uparrow$ с помощью $D^{(j,0)}$ строится преобразование квантованного поля $\psi_\sigma(x)$, как это описано в § 10.

Чтобы определить такие преобразования для элементов *полной* группы $\mathscr{P}$, достаточно задать их для дискретных преобразований P, T. Сверх того, мы одновременно опишем операцию зарядового сопряжения квантованных полей. Построим, как в § 7, другое квантованное поле $\chi_\sigma(x)$, преобразующееся по сопряженному представлению $D^{(0,j)}$. Тогда компоненты $\{\psi_\sigma(x), \chi_\sigma(x)\}$ вместе образуют *поле с удвоенным числом компонент*, которое мы обозначим через $\varphi_\rho(x)$; для всех элементов $\mathscr{P}_+^\uparrow$ определено преобразование этого поля, состоящее в отдельном преобразовании каждого из полей $\psi_\sigma(x)$, $\chi_\sigma(x)$. Для поля $\varphi_\rho(x)$ и будут определены дискретные преобразования, а тем самым и любые преобразования группы $\mathscr{P}$.

Пространственное отражение. Как и в § 7, мы зададим оператор P с помощью матрицы γ_0; при этом допустим фазовый множитель η_P, который может быть выбран по-разному в зависимости от рассматриваемого вопроса:

$$\psi'_\sigma(x) = \eta_P \chi_\sigma(-\boldsymbol{x}, x^0), \quad \chi'_\sigma(x) = \eta_P \varphi_\sigma(-\boldsymbol{x}, x^0). \tag{20.1}$$

Зарядовое сопряжение. Оператор C определяется по образцу зарядового сопряжения биспиноров (см. (6.42)), где преобразование спинора производится с помощью матрицы C, а преобразование коспинора — с помощью матрицы $C^{-1} = -C$. Заменяя эти матрицы представляющими их матрицами в представлениях $D^{(j,0)}$, $D^{(0,j)}$ и учитывая, что элементы этих матриц являются однородными функциями степени $2j$ от элементов C (см. (9.48)), мы приходим к следующему правилу преобразования:

$$\begin{gathered}\psi'_\sigma(x) = \eta_C \sum_\tau C^{(j)^{-1}+}_{\sigma\tau} \chi_\tau(x), \\ \chi'_\sigma(x) = \eta_C (-1)^{2j} \sum_\tau C^{(j)^{-1}}_{\sigma\tau} \psi^\dagger_\tau(x).\end{gathered} \tag{20.2}$$

Обращение времени. В § 7 обращение времени задавалось с помощью матрицы $\gamma_0\gamma_5$; следуя Вигнеру, мы включим в оператор T добавочное зарядовое сопряжение, полагая $\mathrm{T} = \eta_T \gamma_0 \gamma_5 \mathrm{C}$ [1]). Тогда имеем

$$\begin{gathered}\psi'_\sigma(x) = \eta_T \sum_\tau C^{(j)^{-1}}_{\sigma\tau} \psi^\dagger_\tau(\boldsymbol{x}, -x^0), \\ \chi'_\sigma(x) = \eta_T C^{(j)^{-1}}_{\sigma\tau} \chi_\tau(\boldsymbol{x}, -x^0).\end{gathered} \tag{20.3}$$

Как можно показать, операторы P и C, действующие на пространстве векторов состояния, оказываются *унитарными*, в то время как оператор T — *антиунитарным*.

Мы вынуждены ограничиться здесь сводкой формальных правил, по которым выполняются дискретные преобразования. Более глубокий анализ относится к динамике квантованных полей и выходит за рамки этой книги.

---

[1]) Существует другое определение оператора T, не включающее C (Швингер).

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Преобразования Лоренца и δ-функция

Мы докажем следующее соотношение:

$$\omega(\boldsymbol{p})\,\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') = \omega(\overrightarrow{\Lambda p})\,\delta(\overrightarrow{\Lambda p}-\overrightarrow{\Lambda p'}), \tag{I.1}$$

где Λ — любое преобразование Лоренца. Это соотношение есть равенство функционалов, действующих на функции $f(\boldsymbol{p})=f(p^1, p^2, p^3)$, бесконечно дифференцируемые и достаточно быстро убывающие на бесконечности; иначе говоря, требуется доказать, что

$$\int f(\boldsymbol{p})\,\omega(\boldsymbol{p})\,\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,d\boldsymbol{p} = \int f(\boldsymbol{p})\,\omega(\overrightarrow{\Lambda p})\,\delta(\overrightarrow{\Lambda p}-\overrightarrow{\Lambda p'})\,d\boldsymbol{p} \tag{I.2}$$

для всех таких функций. Левая часть (I.2), по определению δ-функции, равна $f(\boldsymbol{p}')\,\omega(\boldsymbol{p}')$. Для вычисления правой части выполним замену переменных $\Lambda p=q$; в силу свойств инвариантной меры (11.12), (11.13) правая часть равна

$$\int f(\overrightarrow{\Lambda^{-1}q})\,\omega(\boldsymbol{q})\,\delta(\boldsymbol{q}-\overrightarrow{\Lambda p'})\,\omega(\overrightarrow{\Lambda^{-1}q})\,\frac{d\boldsymbol{q}}{\omega(\boldsymbol{q})} = f(\boldsymbol{p}')\,\omega(\boldsymbol{p}'),$$

что и требовалось доказать.

II. Лемма Шура

Лемма Шура утверждает, что матрица A, перестановочная со всеми матрицами T_g некоторого неприводимого представления $\{T_g\}$ группы G, кратна единичной. В самом деле, пусть V — пространство представления $\{T_g\}$. Можно считать, что размерность V

больше 1 (иначе утверждение леммы тривиально). Покажем сначала, что в пространстве V найдется хотя бы один собственный вектор оператора A. Система уравнений

$$(A-\lambda\cdot 1)\,x=0 \tag{II.1}$$

имеет в качестве детерминанта многочлен от λ; поэтому достаточно взять в качестве λ какой-либо корень этого многочлена, чтобы детерминант обратился в нуль, и тем самым система (II.1) имела ненулевое решение. Такое решение x и есть собственный вектор A. Покажем теперь, что собственные векторы, принадлежащие собственному значению λ, образуют инвариантное подпространство представления $\{T_g\}$. Отсюда и будет следовать лемма, поскольку единственным инвариантным подпространством в силу неприводимости $\{T_g\}$ может быть только все пространство V, и, значит, (II.1) верно для всех x.

Итак, пусть $Ax=\lambda x$. Тогда для любого элемента g группы G по условию

$$AT_gx=T_gAx=T_g(\lambda x)=\lambda T_gx,$$

и вектор T_gx — тоже собственный вектор, принадлежащий λ (или 0). В обоих случаях оператор T_g не выводит вектор x за пределы собственного подпространства, которое, таким образом, инвариантно.

Лемма Шура может быть распространена, при надлежащих предположениях, и на бесконечномерные представления.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Bargmann, On unitary representations of continuous groups, Ann. Math. 59, 1—46 (1954).
2. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров, Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, Физматгиз, 1969.
3. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, 3-е изд., «Наука», 1974.
4. Б. Л. Ван дер Варден, Метод теории групп в квантовой механике, НТВУ, Харьков, 1938.
5. S. Weinberg, (а) Feynman rules for any spin, I, Phys. Rev. **133**, B1318—1332 (1964); (б) Feynman rules for any spin. II. Massless particles, Ib. **134**, B882—896 (1964); (в) Photons and gravitons in S-matrix theory: derivation of charge conservation and equality of gravitational and inertial mass, Ib. **135**, B1049—1056 (1964); (г) Photons and gravitons in perturbation theory: derivation of Maxwell's and Einstein's equations, Ib. **138**, B988—1002 (1965).
6. H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, 2. Aufl., Hirzel, Leipzig, 1931.
7. E. P. Wigner, On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group, Ann. Math. **40**, 149—204 (1939).
8. A. Visconti, Théorie quantique des champs, tt. I, II, Paris, Gauthier-Villars, 1960.
9. Р. Йост, Основы теории квантованных полей, «Мир», 1967.
10. D. Kastler, Introduction à l'éléctrodynamique quantique, Paris, Dunod, 1961.
11. G. W. Mackey, Induced representations of locally compact groups I. Ann. Math. 55, 101—139 (1952).
12. Ю. Б. Румер, Спинорный анализ, ОНТИ, 1936.
13. Ю. Б. Румер, А. И. Фет, Оператор поляризации в квантовой теории поля, ЖЭТФ 55, 1390—1392 (1968).
14. Ю. Б. Румер, А. И. Фет, Теория унитарной симметрии, «Наука», 1970.
15. D. J. Simms, Lie groups and quantum mechanics, Lecture Notes in Math. 52, Springer, 1968.
16. С. Стернберг, Лекции по дифференциальной геометрии, «Мир», 1970.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Юрий Борисович Румер,

Абрам Ильич Фет

ТЕОРИЯ ГРУПП
И КВАНТОВАННЫЕ ПОЛЯ

М., 1977 г., 248 стр. с илл.

Редактор *И. Г. Вирко*
Технический редактор *Н. В. Кошелева*
Корректор *О. А. Сигал*

Сдано в набор 10.02.1977 г. Подписано к печати 18.08 1977 г.
Бумага 84 × 108/32. Тип. № 1.
Физ. печ. л. 7,75. Условн. печ. л. 13,02. Уч.-изд. л. 10,61.
Тираж 7400 экз. Т-04230. Цена книги 75 коп.
Заказ № 279

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

1 тип. изд. «Наука». 199034, Ленинград, В-34, 9 линия, д. 12